

Probabilités : Variable aléatoire

Christophe ROSSIGNOL*

Année scolaire 2013/2014

Table des matières

1	Quelques rappels	2
1.1	Loi de probabilité	2
1.2	Vocabulaire des événements	2
1.3	Probabilité d'un événement	3
2	Variable aléatoire	3
2.1	Un exemple pour comprendre	3
2.2	Loi de probabilité d'une variable aléatoire	4
3	Paramètres d'une variable aléatoire	4
3.1	Espérance, variance, écart-type	4
3.2	Formules sur l'espérance et la variance	5

*Ce cours est placé sous licence Creative Commons BY-SA <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0/fr/>

1 Quelques rappels

1.1 Loi de probabilité

Définition : On appelle **expérience aléatoire** toute expérience ayant plusieurs **issues** (ou **éventualités**) possibles et dont on ne peut pas prévoir à l'avance laquelle de ces issues sera réalisée.
 Ces éventualités sont notées $e_1; e_2; \dots; e_n$.
 Leur ensemble est noté Ω est appelé **univers**.
 On a donc $\Omega = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$.

Exemple : On lance un dé à 6 faces.
 L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Définitions :

- Chaque éventualité e_i est affecté d'une **probabilité**, c'est-à-dire d'un nombre noté p_i tel que :

$$0 \leq p_i \leq 1 \quad \text{et} \quad p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$
- On appelle **loi de probabilité** la donnée des p_i vérifiant ces conditions.
- Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'ils sont **équiprobables**, ou que la loi de probabilité p est **équiprobable** (ou **équirépartie**).

Exemple : On lance un dé à 6 faces bien équilibré. Chaque face ayant les mêmes chances d'apparaître, chaque éventualité a une probabilité de $\frac{1}{6}$. La loi de probabilité est donc :

e_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Remarque : De manière générale, si une expérience aléatoire est **équiprobable** et comporte n **issues différentes**, chacune des issues a une **probabilité de $\frac{1}{n}$** .

1.2 Vocabulaire des événements

Définition :

Un **événement** A est une **partie** de l'univers Ω (on note $A \subset \Omega$).
 \emptyset est l'événement **impossible**.
 Ω est l'événement **certain**.

Exemple : On lance un dé à 6 faces bien équilibré.

— Des exemples d'événement :

- A : « Obtenir un nombre pair »
- B : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 »
- B' : « Obtenir un nombre strictement supérieur à 4 »
- C : « Obtenir 7 »
- D : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 6 »

On a :

- $A = \{2; 4; 6\}$
- $B = \{1; 2\}$
- $B' = \{5; 6\}$
- $C = \emptyset$ (événement impossible)
- $D = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\} = \Omega$ (événement certain)

Définition : Soient A et B deux événements d'un univers Ω .

- L'événement $A \cap B$ est l'événement « **A et B** ».
- L'événement $A \cup B$ est l'événement « **A ou B** ».
- L'événement \bar{A} est l'événement « **contraire de A** » ou « **non A** ».
- Deux événements A et B sont **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple : On reprend les notations de l'exemple précédent.

- $A \cap B$ est l'événement « Obtenir un nombre pair inférieur ou égal à 2 ».
 $A \cap B = \{2\}$
- $A \cup B$ est l'événement « Obtenir un nombre pair ou un nombre inférieur ou égal à 2 ».
 $A \cup B = \{1; 2; 4; 6\}$
- \bar{A} est l'événement « Obtenir un nombre impair ».
 $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$
- Les événements B et B' sont incompatibles.

1.3 Probabilité d'un événement

Propriété :

La **probabilité d'un événement** A est la **somme des probabilités des issues** qui le composent. On la note $p(A)$.
On a donc $0 \leq p(A) \leq 1$.

Remarques :

1. $p(\Omega) = 1$. L'ensemble Ω est un **événement certain**.
2. $p(\emptyset) = 0$. L'ensemble vide est un **événement impossible**.
3. Dans le cas de l'équiprobabilité, si l'univers Ω comporte n issues, on a :

$$p_i = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nbre de cas favorables}}{\text{nbre de cas possibles}}$$

Propriété :

1. Si A et B sont deux événements :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \quad \text{et} \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

2. Si les événements A et B sont incompatibles :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

Exemple : On reprend les notations de l'exemple du 1.2

- $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ et $p(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
- $p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{6}$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (on retrouve ce résultat directement en détaillant l'événement $A \cup B$).

Exercices : 1, 2 page 292¹ – 3 page 292² – 5, 6 page 292; 27, 28, 29, 30 page 304; 31, 33, 34, 35, 36 page 305 et 37 page 306³ [TransMath]

2 Variable aléatoire

2.1 Un exemple pour comprendre

Exemple : On lance trois pièces de monnaie équilibrées.

L'univers est : $\Omega = \{PPP; PPF; PFP; FPP; PFF; FPF; FFP; FFF\}$.

On gagne 1 € chaque fois que F apparaît et on perd 1 € chaque fois que P apparaît.

On note X la fonction qui, à chaque issue, associe le gain algébrique (positif ou négatif) correspondant.

X est appelée **variable aléatoire** sur Ω .

- Les valeurs possibles pour X sont $\{-3; -1; 1; 3\}$
- L'événement $X = -3$ est $\{PPP\}$. Sa probabilité est $p(X = -3) = \frac{1}{8}$.
- L'événement $X = -1$ est $\{PPF; PFP; FPP\}$. Sa probabilité est $p(X = -1) = \frac{3}{8}$.

1. Expérience aléatoire et probabilité.

2. Événements.

3. Calcul de probabilités.

- L'événement $X = 1$ est $\{FFP; FPF; PFF\}$. Sa probabilité est $p(X = 1) = \frac{3}{8}$.
 - L'événement $X = 31$ est $\{FFF\}$. Sa probabilité est $p(X = 3) = \frac{1}{8}$.
- On résume ceci dans un tableau, appelé **loi de probabilité de la variable aléatoire** X :

gain x_i	-3	-1	1	3
$p(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

2.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition : Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

- On appelle **variable aléatoire** X toute fonction définie sur Ω , à valeurs dans \mathbb{R} .
 - On note $x_1; x_2; \dots; x_n$ les valeurs prises par X .
- On appelle **loi de probabilité de la variable aléatoire** X la fonction qui, à chaque x_i , associe la probabilité de l'événement $p(X = x_i)$.
- On peut résumer les résultats dans un tableau :

x_i	x_1	x_2	\dots	x_n
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	\dots	p_n

Remarque : On a $\sum_{i=1}^n p(X = x_i) = 1$.

Exercices : 1, 2, 3 page 296 et 44 page 307⁴ – 14 page 300⁵ [TransMath]

3 Paramètres d'une variable aléatoire

3.1 Espérance, variance, écart-type

Définition : Avec les notations précédentes, on appelle :

- **Espérance mathématique** de X :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n = \sum_{i=1}^n p_i x_i$$

- **Variance** de X :

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n (x_n - E(X))^2 = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

- **Écart-type** de X :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Exemple : On reprend l'exemple du 2.1.

$$E(X) = (-3) \times \frac{1}{8} + (-1) \times \frac{3}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = 0$$

Le jeu est équitable.

$$V(X) = \frac{1}{8} (-3 - 0)^2 + \frac{3}{8} (-1 - 0)^2 + \frac{3}{8} (1 - 0)^2 + \frac{1}{8} (3 - 0)^2 = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \simeq 0,79$$

Remarques :

- Si $E(X) > 0$, le jeu est favorable au joueur.
- Si $E(X) < 0$, le jeu est défavorable au joueur.
- Si $E(X) = 0$, le jeu est équitable.

4. Loi de probabilité d'une variable aléatoire.

5. Variable aléatoire et situation géométrique.

2. Lors de la répétition, un grand nombre de fois, de l'expérience dans les mêmes conditions, la moyenne des valeurs obtenues par X se rapproche de l'espérance mathématique de X .

Module : 18 page 302⁶ – 19 page 303⁷ – 67 page 313⁸ [TransMath]

Exercices : 4, 5, 6 page 297 ; 13 page 300 ; 39, 40, 42 page 306 ; 45, 46 page 307 et 62, 65 page 312⁹ – 15 page 300 et 48 page 308¹⁰ [TransMath]

3.2 Formules sur l'espérance et la variance

Définition : Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω . On suppose que X prend les valeurs x_1, x_2, \dots, x_n .
 Soient a et b deux nombres réels.
 On construit une **nouvelle variable aléatoire** Y en associant à chaque issue donnant la valeur x_i , le nombre $y_i = ax_i + b$.
 Cette variable aléatoire est notée $aX + b$.

Propriété : Soit X une variable aléatoire d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$.
 Pour tous nombres a et b :

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad \text{et} \quad V(aX + b) = a^2V(X)$$

Exercices : 7, 8 page 298 ; 49 page 308 ; 51, 53, 54 page 309 et 55 page 310¹¹ – 56 page 310¹² – 57 page 311¹³ [TransMath]

Références

[TransMath] transMATH 1^{re}S, édition 2011 (NATHAN)

3, 4, 5

6. Afficher les indicateurs d'une variable aléatoire.
 7. Lien entre espérance mathématique et moyenne.
 8. Simulation.
 9. Paramètres de variables aléatoires
 10. Jeu équitable.
 11. Interpréter l'espérance mathématique.
 12. Algorithmique.
 13. R.O.C.