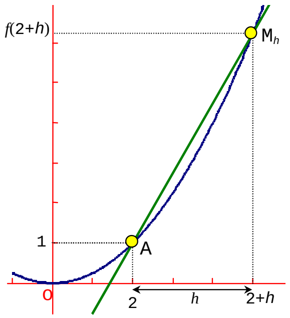
FONCTIONS DERIVATION : COURS

I) Introduction



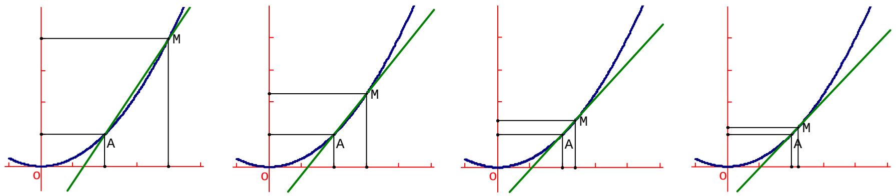
1. Activité 1 : notion de tangente

La courbe C est la représentation graphique de la fonction $f : x \longrightarrow \frac{1}{4}x^2$.

Le point A est le point fixe de la courbe C d'abscisse 2.

Considérons une sécante (AM), où M est un point variable de la courbe C.

On conçoit que plus le point M est proche de A, plus la droite (AM) semble répondre à l'idée que l'on se fait, en géométrie, d'une tangente.



h = 2 h = 1 h = 0,5 h = 0,2

La tangente apparaît comme la position limite des sécantes (AM) lorsque M se rapproche de A. Précisons davantage.

On note 2 + h l'abscisse du point M.

a. Calculer le coefficient directeur de la droite (AM) quand h = 3.

b. Exprimer, dans le cas général, le coefficient directeur $t(h)$ de la droite (AM) en fonction des coordonnées des points A et M puis montrer qu'il est égal d'abord à $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ puis à $1+\frac{h}{4}$.

→ Ce nombre est appelé **taux de variation** de f entre 2 et 2 + h.

c. Quelle est la limite ℓ de $t(h) = 1+\frac{h}{4}$ quand h tend vers 0 (autrement dit, de quel réel se rapproche t(h) quand h tend vers 0 ?).

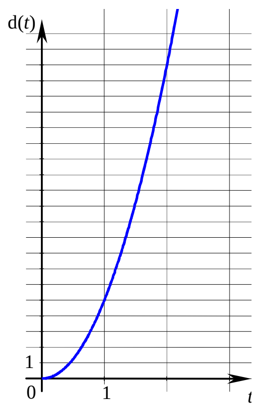
→ On note : $\ell = \lim\limits_{h\to 0} t(h)$; ce nombre ℓ qui est la limite des nombres $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ lorsque h tend vers zéro est appelé **nombre dérivé de f en 2**; On le note **$f'(2)$**. Ainsi, $f'(2)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

d. Tracer la droite (T) qui passe par A et qui a pour coefficient directeur ce nombre ℓ.

→ Cette droite (T) est la **tangente à C au point A**.

e. Donner l'équation réduite de (T).

2. Activité 2 : notion de vitesse instantanée



On laisse tomber, sans vitesse initiale, un caillou du bord d'un puits d'une profondeur de 20 m.

Les physiciens ont montré qu'au bout d'une durée t de chute, la distance d(t) parcourue par le caillou est donnée approximativement par d(t) = 5t^2, expression dans laquelle t est exprimé en secondes et d(t) en mètres.

On dit que d(t) est la distance parcourue à l'instant t.

1°) D'après le graphique, au bout de combien de temps le caillou arrive–t–il au fond du puits ? Retrouver ce résultat par le calcul.

2°) Quelle est la vitesse moyenne (en m.s^{-1} puis en km.h^{-1}) du caillou entre le moment où on le lâche et son arrivée ?

3°) On s'intéresse à la vitesse instantanée du caillou au bout de 1s.

a. Calculer la vitesse moyenne du caillou entre 1s et 1,5s puis entre 1s et 1,25s, puis entre 1s et 1,1s.

b. Calculer la vitesse moyenne du caillou entre 1s et (1 + t)s (→ **taux de variation** de d entre 1 et 1 + t).

c. Que vaut cette vitesse si t tend vers 0 (t devient très petit) ?
On l'appelle vitesse instantanée du caillou au temps t = 1s (→**nombre dérivé** de d en 1).

4°) De même :

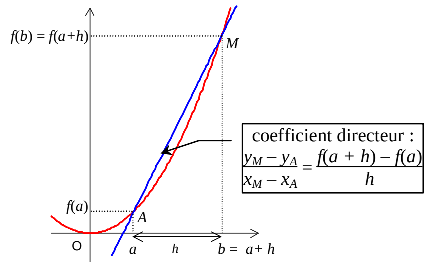
a. Calculer la vitesse moyenne du caillou entre (2 – t)s et 2s ;

b. Calculer alors la vitesse instantanée du caillou au moment où il tombe au fond du puit.

II) Nombre dérivé

f est une fonction définie sur un intervalle I ; a et h sont des réels tels que $a \in$ I et $a + h \in$ I.

1. Accroissement moyen (ou taux de variation)



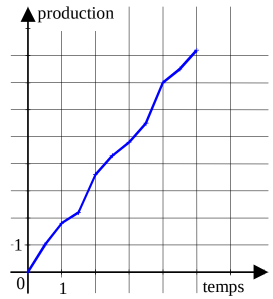
Définition

On appelle **taux de variation** ou **accroissement moyen** de f entre a et $b = a + h$ le nombre : $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Interprétation graphique : ce nombre est le coefficient directeur de la sécante (AM) à la courbe (C) représentant f.

Exemple : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = -x^2 + 4$.
Pour a = 1, le taux de variation entre 1 et 1 + h est :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\left(-(1+h)^2+4\right)-\left(-1^2+4\right)}{h} = \frac{-\cancel{1}-2h-h^2+\cancel{4}+\cancel{1}-\cancel{4}}{h} = -2-h.$$

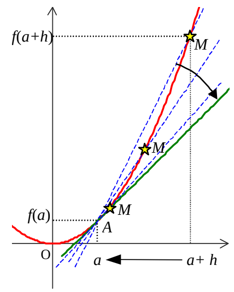


Ex 1 : La production d'une machine en fonction de la durée d'utilisation est donnée par ce tableau :

Temps (en h)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,,5	5
Production (en t)	0	1	1,8	2,2	3,6	4,3	4,8	5,5	7	7,5	8,2

1. Montrer que les accroissements moyens entre 0h et 2h et entre 3h et 4,5h sont égaux.
2. Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Nombre dérivé en a



Définition

On dit que la fonction f est **dérivable en a** si son taux de variation $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ tend vers un nombre réel lorsque h tend vers 0. Ce nombre est alors appelé **nombre dérivé de f en a** et noté **$f'(a)$**. Ainsi, $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Interprétation graphique : $f'(a)$ est la limite des coefficients directeurs des sécantes (AM) lorsque M tend vers A.

Exemple : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = -x^2 + 4$.

Pour a = 1, son taux de variation entre 1 et 1 + h est : $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = -2-h$; Lorsque h tend vers 0, $-2-h$ tend vers -2 ;

Ainsi, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} -2-h = -2$. Donc f est dérivable en 1, et $f'(1) = -2$.

Comment démontrer qu'une fonction est dérivable en a :

→ On calcule le taux de variation de f entre a et $a + h$, où h est un réel non nul ; On cherche à le simplifier le cas échéant ;

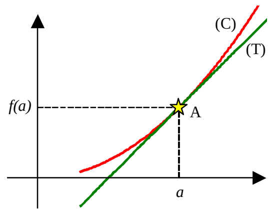
→ On cherche sa limite lorsque h tend vers 0 : cette limite, si elle existe et est finie, est le nombre dérivé de f en a.

Ex 2 : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

1. Calculer le taux de variation de f entre 2 et $2 + h$.
2. Montrer que f est dérivable en 2 et calculer $f'(2)$.

Ex 3 : Soit f la fonction définie sur Ë par $f(x) = 3x^2 - x + 4$. Montrer que f est dérivable en 1 et calculer $f'(1)$.

3. Tangente à la courbe représentative d'une fonction *f*

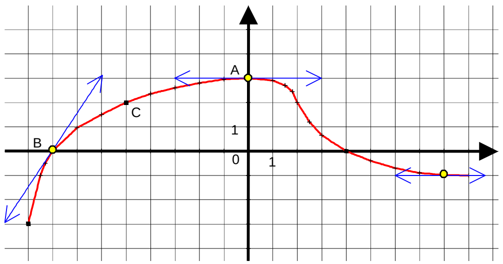


Définition

Soit f une fonction dérivable en a. On appelle **tangente** à la courbe (C) de f au point A d'abscisse a la droite (T) :
→ **passant par** A,
→ **ayant pour coefficient directeur** $f'(a)$.

Interprétation graphique : (T) est la position "limite" des sécantes (AM) lorsque M tend vers A.

Ex 4 : On a tracé ci-contre la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur [–9 ; 9] ainsi que quelques unes de ses tangentes.



1. Compléter :
   → $f(0) = \ldots$ et $f'(0) = \ldots$,
   → $f(-8) = \ldots$ et $f'(-8) = \ldots$,
   → $f(8) = \ldots$ et $f'(8) = \ldots$,
2. On sait que $f'(-5) = \frac{1}{3}$. Tracer la tangente à C_f en C.
3. Voici 4 intervalles:]-∞; -1] ; [-1; 0] ; [0 ; 1] ; [1 ;+∞[;
   Auquel de ces intervalles appartient $f'(6)$?
4. Compléter avec > ou < : $f'(-3) \ldots 0$ et $f'(4) \ldots 0$.

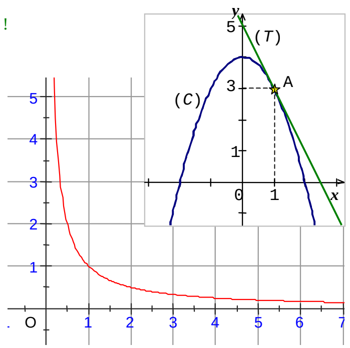
Résultat

La tangente (T) à la courbe (C) au point A d'abscisse a d'une fonction a pour équation : $\mathbf{y = f'(a)(x - a) + f(a)}$.

Preuve : Notons $y = px + q$ l'équation réduite de (T) ;
Par définition, $p = f'(a)$ et puisque A (a ; $f(a)$) ∈ (T), $f(a) = f'(a)\times a + q \Leftrightarrow q = f(a) - f'(a)\times a$;
Donc (T) a pour équation réduite : $y = f'(a)x + (f(a) - f'(a)\times a) \Leftrightarrow y = f'(a)(x - a) + f(a)$; CQFD !

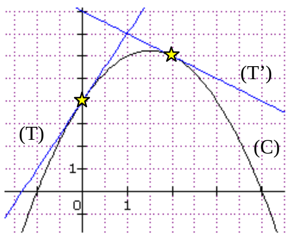
Exemple : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = -x^2 + 4$.
f est dérivable en 1, et $f'(1) = -2$.
La tangente au point d'abscisse 1 passe par A(1 ; 3) et a pour coefficient directeur –2.
L'équation de cette tangente est $y = -2(x - 1) + 3$ soit $y = -2x + 5$.

Ex 5 : Soit f la fonction définie sur]0 ; +∞[par $f(x) = \frac{1}{x}$ dont voici la courbe :



→ Déterminer l'équation de la tangente (T) à C_f au point A d'abscisse 1 ;Tracer (T).

→ Déterminer l'équation de la tangente (T') à C_f au point B d'abscisse 2 ; Tracer (T').



Ex 6 : On considère la fonction f définie par : $f(x) = -x^2 + 3x + 4$.
Soit (C) sa courbe et (T) et (T') ses tangentes aux points d'abscisses respectives 0 et 2.
Compléter :

1. $f(0) = \ldots$
2. $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(h)-4}{h} = \ldots$
3. $f'(2) = \ldots$
4. (T) : $y = \ldots$
5. $f'(3) \ldots 0$
6. $f'(-1) \ldots 0$
7. $f'(x) = 0$ lorsque $x = \ldots$
8. $f'(x) < 0$ lorsque $x \ldots$

Résultat

Soit f une fonction dérivable en a et (T) sa tangente en a.
(T) est la représentation graphique de la fonction affine $g : x \longmapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ qui est la meilleure **approximation affine** de f au voisinage de a. Autrement dit, si $x \approx a$ alors $f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a)$.

Exemple : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = -x^2 + 4$.
f est dérivable en 1 et l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = -2x + 5$. Donc si $x \approx 1$ alors $f(x) \approx -2x + 5$. Par exemple :
→ $f(1{,}001) \approx -2\times1{,}001 + 5 = 2{,}998$ alors que $f(1{,}001) = 2{,}997999$;
→ $f(0{,}9987) \approx -2\times0{,}9987 + 5 = 3{,}0026$ alors que $f(0{,}9987) = 3{,}00259831$.

Ex 7 : $f(x) = x^2 + x - 1$ et (T) : $y = 3x - 2$; (T) est la tangente à (C), courbe représentative de f, en 1.
Sans calculatrice déterminer une valeur approximative de $f(0{,}99)$ et de $f(1{,}02)$.
Calculer ensuite leurs valeurs exactes afin d'apprécier la qualité des approximations ainsi obtenues.

5. Coût marginal d'une production

Soit C la fonction coût total qui, à une quantité q produite, associe le coût total $C(q)$ des coûts variables et des coûts fixes.

Définition

Le **coût marginal** de production est l'accroissement du coût total dû à la fabrication d'un objet supplémentaire.
On le note $C_m(q)$ et donc : $\mathbf{C_m(q) = C(q + 1) - C(q)}$.

Remarque : $C_m(q) = C(q+1) - C(q) = \frac{C(q+1) - C(q)}{(q+1) - q}$ donc $C_m(q)$ est le taux de variation de C entre q et $q + 1$.

Ex 8 : La fonction de coût total pour la fabrication de q chaises est donnée, en €, par $C(q) = -q^2 + 20q + 200$, pour $q \in [0 ; 10]$.

1. Calculer le coût pour la fabrication de 3 chaises.
2. Calculer le coût marginal de la 4[ième] chaise fabriquée.
3. Exprimer le coût marginal $C_m(q)$ de la q-ième chaise en fonction de q.

Résultat

En pratique, on considère que 1 est très petit par rapport aux grandes quantités produites en général ;
Aussi le nombre $C'(q)$ est une approximation du coût marginal, d'où : $\mathbf{C_m(q) \approx C'(q)}$.

Ex 9 : Les données sont celles de l'exercice précédents.
Déterminer de cette façon le coût marginal $C_m(3)$ et comparer avec le résultat trouvé précédemment.

III) Fonction dérivée

1. Fonction dérivée

Définition

f est une fonction définie sur un intervalle I.
f est **dérivable sur I** lorsque, pour tout x de I, le nombre dérivé de f en x existe.
Dans ce cas, la **fonction dérivée de f** est la fonction qui à tout x de I associe $f'(x)$.
Cette fonction est notée f' et $f' : x \mapsto f'(x)$ pour tout x de I

Exemple : Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = -x^2 + 4$.
Soit x un réel quelconque; $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(-(x+h)^2 + 4) - (-x^2 + 4)}{h} = \frac{(-x^2 - 2xh - h^2 + 4) + x^2 - 4}{h} = \frac{-2xh - h^2}{h} = -2x - h$;
Or $\lim\limits_{h\to 0} -2x - h = -2x$; f est donc dérivable en x et $f'(x) = -2x$; x étant un réel quelconque, f est dérivable sur ℝ et $f'(x) = -2x$.

2. Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Résultat

Ensemble de définition	Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivabilité
$\mathbb{R}$	• $f(x) = k$ (constante)	$\to$ $f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	• $f(x) = x$	$\to$ $f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	• $f(x) = x^2$	$\to$ $f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	• $f(x) = x^3$	$\to$ $f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	• $f(x) = x^n$ (où $n \geqslant 1$)	$\to$ $f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^*$	• $f(x) = \frac{1}{x}$	$\to$ $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}^*$	• $f(x) = \frac{1}{x^2}$	$\to$ $f'(x) = -\frac{2}{x^3}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}^*$	• $f(x) = \frac{1}{x^n}$ (où $n \geqslant 1$)	$\to$ $f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}^+$	• $f(x) = \sqrt{x}$	$\to$ $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$

Preuve :

$\to$ cas $f(x) = x$: Soit x un réel quelconque ; $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)-x}{h} = \frac{h}{h} = 1$; Or $\lim\limits_{h\to 0} 1 = 1$: f est donc dérivable en $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = 1$.

$\to$ cas $f(x) = \frac{1}{x}$: Soit x un réel quelconque ; $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \frac{-h}{x(x+h)h} = \frac{-1}{x(x+h)}$;

Or $\lim\limits_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$: f est donc dérivable en $x \in \mathbb{R}$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

$\to$ …

Ex 10 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$\to$ $f(x) = 2006$ $\to$ $g(x) = x^3$ $\to$ $h(x) = \frac{1}{x^3}$

Ex 11 : f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Déterminer l'équation de la tangente (T) à C_f au point A d'abscisse 4. Tracer C_f et (T).

IV) Opérations sur les dérivées

u et *v* sont deux fonctions dérivables sur un intervalle *I*, et *k* est un réel.

Résultat

Si u et v sont dérivables sur I alors :	**Exemples**
• **ku** est dérivable sur I et **(ku)' = k.u'**. • **u + v** est dérivable sur I et **(u + v)' = u' + v'** . • **u . v** est dérivable sur I et **(uv)' = u' v + v' u**.	o $f(x) = 3x^2 \to f'(x) = 3\times(2x) = 6x$; o $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x} \to f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$; o $f(x) = x\sqrt{x} \to f'(x) = 1\times\sqrt{x} + x\times\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.
Si de plus v est non nulle sur I alors :	
• $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$. • $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.	o $f(x) = \frac{1}{x^2+1} \to f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2}$; o $f(x) = \frac{x^2+1}{x} \to f'(x) = \frac{2x\times x - (x^2+1)\times 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$.

Preuve (cas $f(x) = u(x) + v(x)$) : Soit $x \in$ I ;

$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(u+v)(x+h)-(u+v)(x)}{h} = \frac{\big(u(x+h)+v(x+h)\big)-\big(u(x)+v(x)\big)}{h} = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$. Or, puisque u et v sont supposées dérivables en x, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x)$ et $\lim\limits_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h} = v'(x)$: f est donc dérivable en $x \in$ I et $f'(x) = u'(x) + v'(x)$; CQFD !

Ex 12 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$\to$ $f(x) = 3x + 1$ $\to$ $g(x) = 2x^2 + 3x - 1$ $\to$ $h(x) = \frac{2x^4 - 3x^2 - 1}{5}$

$\to$ $f(x) = 4\sqrt{x}$ $\to$ $g(x) = 3x^2 - 2\sqrt{x}$ $\to$ $h(x) = (1 - 3x)(x^2 - 4)$

$\to$ $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ $\to$ $g(x) = \frac{1}{3x^2 + 1}$ $\to$ $h(x) = \frac{1-3x}{x^2 - 1}$

Ex 13 : Déterminer la dérivée de chaque fonction :

1. $A(q) = 3q^2 - 2500 + \frac{4800}{q}$
2. $C(q) = 0{,}1q^2 + 2\sqrt{q} + 400$
3. $B(t) = 2t - 3t^3$
4. $D(t) = \frac{-t-4}{t^2+9}$

Ex 14 : Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x_0 , puis donner une équation de cette tangente, et enfin , donner une valeur approchée de $f(a)$, sans utiliser la calculatrice où :

$\to$ $f(x) = x^2 + x + \frac{2}{x^2}$; $x_0 = -1$; $a = -1{,}01$. $\to$ $f(x) = x\sqrt{x}$; $x_0 = 4$; $a = 4{,}008004$.

Ex 15 : Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-1 ; 5]$ et on désigne par C , sa courbe représentative.

1. On considère les points A et B de coordonnées respectives $(0 ; \frac{1}{2})$ et $(2 ; -2)$ et on admet que la droite (AB) est tangente à C au point A.

   Donner, **si c'est possible**, $f(0)$, $f(2)$, $f'(0)$, $f'(2)$.
2. En fait, f est définie sur $[-1 ; 5]$ par $f(x) = \frac{-2x+1}{x+2}$. Retrouver à l'aide des formules de dérivation le résultat obtenu au 1.

Ex 16 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4x^3+1}{3}$.

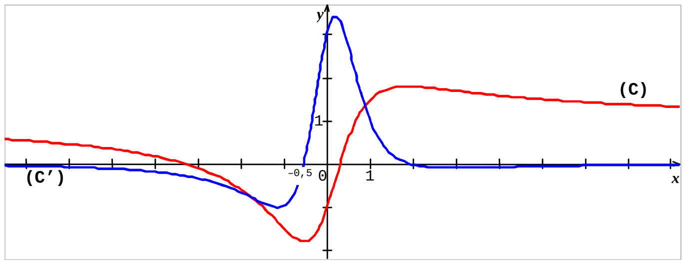
1. C_f passe-t-elle par $A(-1 ; -1)$?
2. La tangente à C_f au point d'abscisse -1 est-elle parallèle à D : $y = -4x + 5$?
3. Existe-t-il des points de C_f en lesquels la tangente est parallèle à Δ : $y = 4x - 2$? Si oui , préciser leurs coordonnées .

Ex 17: Une fonction f est définie sur Ë par : $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Déterminer les nombres a , b et c sachant que : $f(1) = 0$, $f'(1) = -3$ et $f'(0) = -5$

V) Signe de la fonction dérivée & variations de la fonction

1. Variations

Ex 18 : Voici les courbes (*C*) d'une fonction f et (*C'*) de sa fonction dérivée f'.
Dresser le tableau de variation de f et le tableau de signe de f' ; Conjecturer.



Résultat

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors,

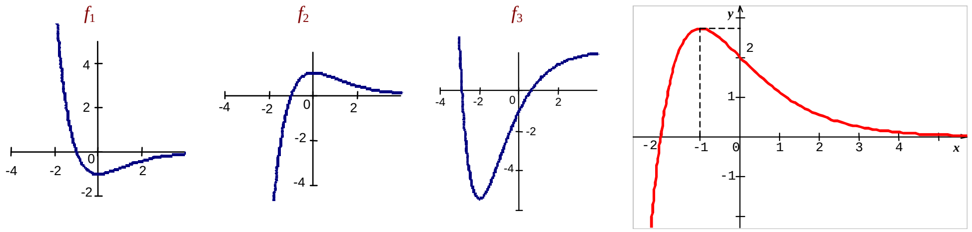
→ si f' est **positive** sur I alors f est **croissante** sur I, et réciproquement ;

→ si f' est **négative** sur I alors f est **décroissante** sur I, et réciproquement ;

→ si f' est **nulle** sur I alors f est **constante** sur I, et réciproquement.

Remarque : ainsi, il y a corrélation entre le signe de la dérivée d'une fonction et les variations de cette dernière.

Ex 19 : Voici la représentation graphique d'une fonction f ainsi que trois autres fonctions f_1, f_2 et f_3.
L'une de ces 3 dernières est f'; Laquelle ? Justifier.



Ex 20 : Pour chacune des fonctions suivantes :

→ Calculer $f'(x)$;

→ Etudier le signe de $f'(x)$;

→ Dresser conjointement le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f.

1. $f(x) = x^3 - 3x + 2$ 2. $f(x) = \dfrac{1}{2x}$ 3. $f(x) = x + \dfrac{49}{x}$ 4. $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2}$ 5. $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$

Ex 21 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)^3$.

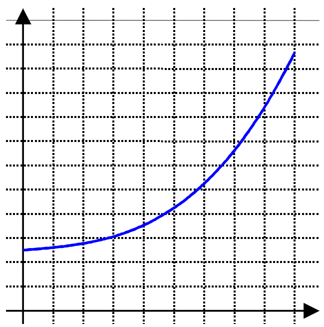
1) Vérifier que $f(x) = (2x - 1)(4x^2 - 4x + 1)$ et calculer $f'(x)$ en utilisant la formule de dérivation d'un produit
2)
   a) Vérifier que f peut s'écrire aussi sous la forme $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$.
   b) Calculer, à partir de cette nouvelle écriture, $f'(x)$.
3) Lequel des deux résultats permet de factoriser $f'(x)$ le plus rapidement ?
   Effectuer cette factorisation puis étudier le sens de variation de f .

Ex 22 :

1. Soit f la fonction définie sur $[-3 ; 4]$ par : $f(x) = -x^2 + 3x + 4$.
   a. Calculer $f(-1)$ et $f(4)$;
   b. Construire le tableau de variations de f ;
   c. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Soit g la fonction définie sur $[-3 ; 4]$ par : $g(x) = -2x^3 + 9x^2 + 24x + 1$.
   a. Vérifier que $g'(x) = 6f(x)$;
   b. Déduire du 1. le sens de variation de g et dresser le tableau de variations de g.
3. Construire la courbe C_g.
   Unités : 1 cm pour unité sur (Ox) et 1 cm pour 24 unités sur (Oy).

Ex 23 : Soit $C(q) = q^3 + 10q + 250$, coût total de production, en k€, pour des quantités q, en tonnes, $q \in [0 ; 9]$.

1. Déterminer le coût moyen, $C_M(q)$, et le coût marginal, $C_m(q)$.
2. Dresser le tableau de variation du coût moyen et vérifier que lorsque le coût moyen est minimal, il est égal au coût marginal.
3. Illustrer ce dernier résultat sur le graphique ci-contre où est représentée la fonction C.



2. Extrémum

Résultat

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

Si f' **s'annule en x_0 en changeant de signe**, alors $f(x_0)$ est un **extremum local**, plus précisément :

minimum

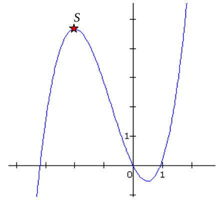
x		x_0	
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	$f(x_0)$	↗

maximum

x		x_0	
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	$f(x_0)$	↘

Ex 24 : La courbe ci-contre est celle de la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x$.

Quelles sont les coordonnées de S ?



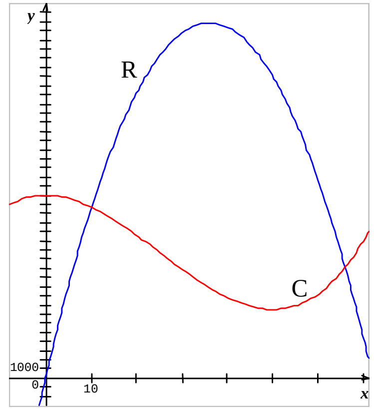
Ex 25 : f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -2x^2 - 4x - 3$.

1. Etudier les variations de f.
2. En déduire que, pour tout réel x, $f(x) < 0$.

Ex 26 : Une entreprise fabrique un appareil électrique. Les services comptables ont estimé que, pour une quantité produite de x appareils de ce type par semaine, les montants en euros des coûts de production et de la recette résultant de la vente de la totalité de la production, valent respectivement : $C(x) = 0{,}2x^3 - 15x^2 + 20000$ et $R(x) = 2160x - 30x^2$

Des contraintes d'ordre technique et relatives au nombre d'employés ne permettent pas de fabriquer plus de 60 appareils par semaine .
On note enfin B(x) le bilan financier hebdomadaire : B(x) = R(x) – C(x).

1) Dans cette question on suppose que la production hebdomadaire est de 30 appareils par semaine.
   Calculer successivement les montants des coûts de production , de la recette et du bilan financier.
2)
   a) Montrer que $B(x) = -0{,}2x^3 - 15x^2 + 2160x - 20000$.
   b) Retrouver la valeur B(30) calculée en 1).
3) Etudier le sens de variation de la fonction R sur [0 ; 60].
   En déduire la production hebdomadaire qui assure une recette maximale.
   Préciser le montant du bénéfice dans ce cas.
4) Etudier le sens de variation de la fonction C sur [0 ; 60].
   En déduire la production qui assure un coût de production hebdomadaire minimal.
   Préciser le montant du bénéfice dans ce cas.
5) Les courbes représentatives des fonctions R et C sont données ci-contre :
   a) Calculer les valeurs prises par la fonction B en 10 et 11.
   b) Déduire du 5)a) et du graphique le nombre minimal d'appareils qu'il faut produire pour réaliser un bénéfice.
6)
   a) Montrer que , pour tout x de [0 ; 60], $B'(x) = -0{,}6(x - 40)(x + 90)$.
   b) Etudier le sens de variation de la fonction B sur [0 ; 60].
   c) En déduire la production hebdomadaire pour laquelle le bénéfice est maximal.
   En préciser la valeur. Marquer sur la graphique où l'on peut lire le résultat obtenu.



Ex 27 : Une entreprise fabrique pendant un intervalle de temps donné une quantité x d'un certain objet .
Les charges de cette entreprise pour fabriquer les x objets sont données en euros par : $C(x) = x^2 - 20x + 400$ où $x > 0$.

1) Les charges unitaires moyennes , notées $C_M(x)$, sont définies par $C_M(x) = \dfrac{C(x)}{x}$.
   Du sens de variation de la fonction C_M sur $]0 ; +\infty[$, déduire la quantité d'objets à fabriquer pour obtenir des charges moyennes unitaires minimales. En préciser le montant.
2) Chaque objet fabriqué est vendu 100 €.
   a) Calculer le bénéfice B(x) résultant de la vente de x objets fabriqués par cette entreprise.
   b) Déterminer x pour que ce bénéfice soit maximal. En préciser la valeur