# EQUATIONS-INEQUATIONS

**Exercice 1 :**

1. Le réel 1 est solution des deux équations :

   (a) $3x + 6 = 5x + 4$ :

   $3\times1 + 6 = 9$ et $5\times1 + 4 = 9$ donc $3\times1 + 6 = 5\times1 + 4$ donc 1 est une solution de l'équation $3x + 6 = 5x + 4$.

   (b) $t^2 + t - 2 = 0$ :

   $1^2 + 1 - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$ donc 1 est une solution de l'équation $t^2 + t - 2 = 0$.

2. L'équation (b) admet une autre solution : recherche d'une solution à tâtons !
   On remarque que $(-2)^2 + (-2) - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$ donc -2 est une autre solution de l'équation $t^2 + t - 2 = 0$.

**Exercice 2 :**

- $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 - 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -1}$ ;
- $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0/2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 0}$ ;
- $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow 2 = x \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 2}$ ;
- $3x - 2 = 0 \Leftrightarrow 3x = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 2/3}$ ;
- $2x + 1 = 2 - 3x \Leftrightarrow 2x + 3x = 2 - 1 \Leftrightarrow 5x = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 1/5}$ ;
- $\dfrac{x+2}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}x + 1$ :

  → *Méthode* 1 : $\dfrac{x+2}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x + 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}x = 1 - 1 + \dfrac{1}{4} \Leftrightarrow 0x = \dfrac{1}{4}$ : **pas de solution** ;

  → *Méthode* 2 : $\dfrac{x+2}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow 4\left(\dfrac{x+2}{2} - \dfrac{1}{4}\right) = 4\left(\dfrac{1}{2}x + 1\right)$

  $\Leftrightarrow 2x + 4 - 1 = 2x + 4 \Leftrightarrow 2x - 2x = 4 - 4 + 1 \Leftrightarrow 0x = 1$ : **pas de solution** .

**Exercice 3 :**

1.
- $(2x - 1)(2x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 1 = 0$ ou $2x + 2 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 1/2}$ ou $\boldsymbol{x = -1}$ ;
- $(2x + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -1/2}$ ;

2.
- $(x - 1)(x + 2) = 3(x + 2) \Leftrightarrow (x - 1)(x + 2) - 3(x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)[(x - 1) - 3] = 0 \Leftrightarrow (x + 2)[(x - 1) - 3] = 0$

  $\Leftrightarrow (x + 2)(x - 4) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0$ ou $x - 4 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -2}$ ou $\boldsymbol{x = 4}$ ;
- $x^2 - 2x + 1 = 2x(x - 1) \Leftrightarrow (x - 1)^2 - 2x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)[(x - 1) - 2x] = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(-x - 1) = 0$

  $\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $-x - 1 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 1}$ ou $\boldsymbol{x = -1}$ ;
- $4(5x + 3)^2 = 9(x - 1)^2 \Leftrightarrow (2(5x + 3))^2 - (3(x - 1))^2 = 0 \Leftrightarrow ((10x + 6) - (3x - 3))\,((10x + 6) + (3x - 3)) = 0$

  $\Leftrightarrow (7x + 9)\,(13x + 3) = 0 \Leftrightarrow 7x + 9 = 0$ ou $13x + 3 = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -9/7}$ ou $\boldsymbol{x = -3/13}$.

**Exercice 4 :**

1.
- $\dfrac{x-1}{x+2} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ et $x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x = 1$ et $x \neq -2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = 1}$ ;
- $\dfrac{(x+1)(x-2)}{2x} = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) = 0$ et $2x \neq 0 \Leftrightarrow (x + 1 = 0$ ou $x - 2 = 0)$ et $x \neq 0$





$\Leftrightarrow (x = -1$ ou $x = 2)$ et $x \neq 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -1}$ ou $\boldsymbol{x = 2}$ ;

2.
- $\dfrac{x+2}{x} = \dfrac{x-1}{x+1} \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{x} - \dfrac{x-1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)(x+1)}{x(x+1)} - \dfrac{x(x-1)}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+2)(x+1) - x(x-1)}{x(x+1)} = 0$

  $\Leftrightarrow (x + 2)(x + 1) - x(x - 1) = 0$ et $x(x + 1) \neq 0 \Leftrightarrow (x^2 + x + 2x + 2) - (x^2 - x) = 0$ et $(x \neq 0$ et $x \neq -1)$

  $\Leftrightarrow 4x + 2 = 0$ et $(x \neq 0$ et $x \neq -1) \Leftrightarrow x = -1/2$ et $(x \neq 0$ et $x \neq -1) \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -1/2}$ .

**Exercice 5 :**

→ $E_1 : -2x + 4 = 5(x - 2)$ :

$$-2x + 4 = 5(x - 2) \Leftrightarrow -2x + 4 = 5x - 10 \Leftrightarrow -2x - 5x = -10 - 4 \Leftrightarrow -7x = -14 \Leftrightarrow x = 2 \;;$$
$$S_1 = \{2\}.$$

→ $E_2 : (-4x + 2)(x + 3) = 6$ :

$$(-4x + 2)(x + 3) = 6 \Leftrightarrow -4x^2 - 12x + 2x + \cancel{6} = \cancel{6} \Leftrightarrow -4x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(-4x - 10) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -4x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{5}{2} \;;$$
$$S_2 = \left\{-\frac{5}{2} ; 0\right\}.$$

→ $E_3 : 4x^2 + 2 = 1$ :

$$4x^2 + 2 = 1 \Leftrightarrow \underbrace{4x^2}_{\geq 0} = \underbrace{-1}_{<0} \text{ : pas de solution !}$$
$$S_3 = \varnothing .$$

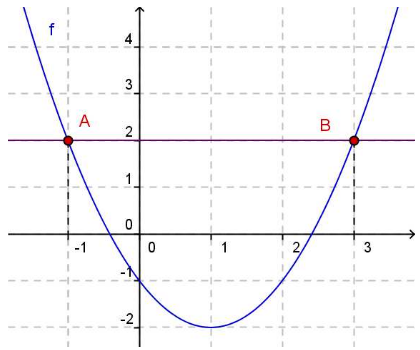
→ $E_4 : \dfrac{x}{x-1} = \dfrac{1}{x^2 - x}$ :

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2 - x} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} - \frac{1}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x(x-1)} = 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \text{ et } x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \text{ et } (x \neq 0 \text{ et } x \neq 1) \Leftrightarrow x = \pm 1 \text{ et } (x \neq 0 \text{ et } x \neq 1) \Leftrightarrow x = -1 \;;$$
$$S_4 = \{-1\}$$

**Exercice 6 :**

La courbe ci-contre est celle de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2x - 1$.

1. Résolution graphiquement de l'équation $f(x) = 2$ :




La courbe $C_f$ coupe la droite (D) d'équation $y = 2$ en 2 points A et B ;

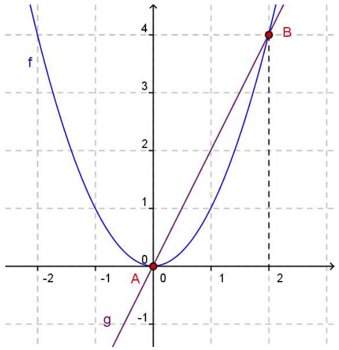
L'équation $f(x) = 2$ a donc 2 solutions : les abscisses de A et B, soit $-1$ et 3 semble-t-il.

2. Vérification :

→ $f(-1) = (-1)^2 - 2(-1) - 1 = 1 + 2 - 1 = 2 \Rightarrow -1$ est bien solution de l'équation $f(x) = 2$ ;

→ $f(3) = 3^2 - 2\times3 - 1 = 9 - 6 - 1 = 2 \Rightarrow 3$ est bien solution de l'équation $f(x) = 2$ .

**Exercice 7 :**



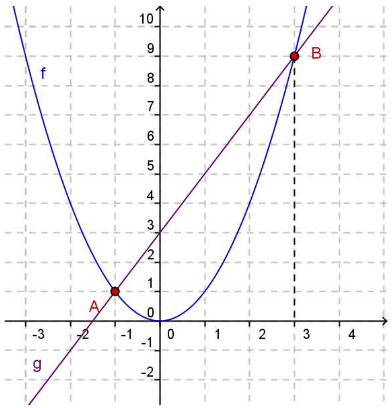

1. Représentations graphiques des fonctions $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto 2x$ :

2. Résolution de l'équation $f(x) = g(x)$ :
   - *graphiquement* : Les courbes $C_f$ et $C_g$ se coupent en 2 points A et B ;
     L'équation $f(x) = g(x)$ a donc 2 solutions : les abscisses de A et B,
     soit 0 et 2 semble-t-il.
   - *algébriquement* :
     $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0$
     $\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 0$.

**Exercice 8 :**

Soient les fonctions $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto 2x + 3$.

1. *Résolution graphique*




Les courbes $C_f$ et $C_g$ se coupent en 2 points A et B ;

L'équation $f(x) = g(x)$ a donc 2 solutions : les abscisses de A et B, soit −1 et 3 semble-t-il.

2. *Résolution algébrique*

a. $x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ :

$$(x-1)^2 - 4 = (x^2 - 2x + 1) - 4 = x^2 - 2x + 1 - 4 = x^2 - 2x - 3.$$

b. Valeurs exactes des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ :

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = 2x + 3$
$\Leftrightarrow x^2 - (2x + 3) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$
$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = 0$ d'après le 2.a.
$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 2^2 = 0$
$\Leftrightarrow [(x-1) - 2][(x-1) + 2] = 0$
$\Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0$
$\Leftrightarrow x - 3 = 0$ ou $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = 1$.





**Exercice 9 :**

*Le problème* :

Trois enfants se partagent au mérite 180 € que leurs parents leur ont donnés pour avoir assuré l'entretien du jardin (tout au long de l'année !). L'un reçoit 25 € de plus qu'un autre qui lui-même reçoit 10 € de plus que le dernier.

On cherche ce que chacun d'eux a perçu.

*La solution* :

→ Choix de l'inconnue : soit $x$ le nombre d'euros perçus par le dernier ;

→ Contrainte(s) : $x \geqslant 0$ ;

→ Mise en équation :
   - Sommes perçues par chacun des 3 enfants : $x$, $x + 10$ et $(x + 10) + 25 = x + 35$ ;
   - Somme totale versée aux 3 enfants : 180 ;

   D'où l'équation : $x + (x + 10) + (x + 35) = 180$ ;

→ Résolution : $x + (x + 10) + (x + 35) = 180 \Leftrightarrow 3x + 45 = 180 \Leftrightarrow 3x = 135 \Leftrightarrow x = 45$ ;

→ Interprétation : 45 obéit aux contraintes d'où la solution du problème : ils sont perçus respectivement :

**45 €**, 45 + 10 = **55 €** et 55 + 25 = **80 €.**

**Exercice 10 :**

*Le problème :*

Un particulier a des marchandises à faire transporter.

→ Un premier transporteur lui demande 460 euros au départ et 3,5 euros par km.

→ Un second lui demande 1 000 euros au départ et 2 euros par km.

Pour quelle distance à parcourir il importe peu de s'adresser à l'un plus qu'à l'autre ?

*La solution* :

→ Choix de l'inconnue : soit $x$ le nombre de km à parcourir ;

→ Contrainte(s) : $x \geqslant 0$ ;

→ Mise en équation :
   - Coût de revient chez le 1er transporteur : $460 + 3{,}5x$ ;
   - Coût de revient chez le 2ième transporteur : $1\,000 + 2x$ ;

   D'où l'équation : $460 + 3{,}5x = 1\,000 + 2x$;

→ Résolution : $460 + 3{,}5x = 1\,000 + 2x \Leftrightarrow 3{,}5x - 2x = 1\,000 - 460 \Leftrightarrow 1{,}5x = 540 \Leftrightarrow x = 540/1{,}5 = 360$ ;

→ Interprétation : 360 obéit aux contraintes d'où la solution du problème :

   Pour **360 km** le prix de revient est le même, à savoir 1 720 € ;

   *Remarque* :
   - ➢ pour moins de 360 km, mieux vaut s'adresser au 2ième transporteur ;
   - ➢ pour plus de 360 km, mieux vaut s'adresser au 1er transporteur.

**Exercice 11 :**

- $x + 1 > 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x > -1} \Leftrightarrow \boldsymbol{x \in ]-1\ ;+\infty[}$ ;
- $2x > 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x > 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x \in ]0\ ;+\infty[}$ ;
- $-x + 2 > 0 \Leftrightarrow -x > -2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x < 2} \Leftrightarrow \boldsymbol{x \in ]-\infty\ ;2[}$ ;
- $3x - 2 < 0 \Leftrightarrow 3x < 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{x < 2/3} \Leftrightarrow \boldsymbol{x \in x \in ]-\infty\ ;2/3[}$ ;
- $2x + 1 \geq 2 - 3x \Leftrightarrow 2x + 3x \geq 2 - 1 \Leftrightarrow 5x \geq 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x > 1/5} \Leftrightarrow \boldsymbol{x \in [1/5\ ;+\infty[}$ ;
- $x^2 - 3x + 1 > (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 > x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x < 0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x \in ]-\infty\ ;0[}$ .

**Exercice 12 :**

Tableau de signe de ces différentes expressions :

- $2x - 3$ : de la forme $ax + b$ avec $a = 2 > 0$, $b = -3$ et $-b/a = -3/2$ d'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $2x - 3$ | | $-$ | 0 | $+$ | |

- $4 - 2x = -2x + 4$ : de la forme $ax + b$ avec $a = -2 < 0$, $b = 4$ et $-b/a = 2$ d'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4 - 2x$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

- $-2x - 1$ : de la forme $ax + b$ avec $a = -2 < 0$, $b = -1$ et $-b/a = -1/2$ d'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2x - 1$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

- $x^2 + 3 > 0$ car $x^2 \geqslant 0$ d'où :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $x^2 + 3$ | | $+$ | |

**Exercice 13 :**

1. Signe des expressions :

- $A(x) = (x + 2)(1 - x)$ :

| | $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a = 1 > 0$ ; $b = 2$<br>$-b/a = -2$ | $x + 2$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $a = -1 < 0$ ; $b = 1$<br>$-b/a = 1$ | $1 - x$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| | $A(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

*Interprétation :*

- ✓ $A(x) < 0$ quand $x \in ]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[$ ;
- ✓ $A(x) > 0$ quand $x \in ]-2 ; 1[$ ;
- ✓ $A(x) = 0$ quand $x = -2$ ou $x = 1$.

- $B(x) = \dfrac{x - 2}{3 - x}$ :

| | $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a = 1 > 0$ ; $b = -2$<br>$-b/a = 2$ | $x - 2$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $a = -1 < 0$ ; $b = 3$<br>$-b/a = 3$ | $3 - x$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| | $B(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | ‖ | $-$ | |

*Interprétation :*

- ✓ $B(x) < 0$ quand $x \in ]-\infty ; -2[\cup]3 ; +\infty[$ ;
- ✓ $B(x) > 0$ quand $x \in ]2 ; 3[$ ;
- ✓ $B(x) = 0$ quand $x = 2$ ;
- ✓ $B(x)$ non défini quand $x = 3$.





- $C(x) = (x + 1)(-x - 3)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x + 1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $-x - 3$ | | $+$ | 0 | $-$ | | $-$ | |
| $C(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

- $D(x) = x(1 + x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $1 + x$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $D(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

- $E(x) = (x - 2)(1 + x)^2$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 2$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $(1 + x)^2$ | | $+$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $E(x)$ | | $-$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

- $F(x) = x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 2$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x + 2$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $F(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

- $G(x) = \dfrac{(x - 1)(1 + x)}{x + 2}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $1 + x$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $x + 2$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $G(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

**Exercice 14 :**

1.

a. Tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x + 3$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $-x + 2$ | | $+$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $(x + 3)(-x + 2)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | |

b. Solutions de l'inéquation $(x + 3)(-x + 2) \geq 0$ : $-3 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow$ **$x \in [-3 ; 2]$.**

2. Résolution des inéquations :

- $(x^2 - 4)(2x + 1) < 0$ :
  - Tableau de signe de $(x^2 - 4)(2x + 1) = (x - 2)(x + 2)(2x + 1)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1/2$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 2$ | | $-$ | 0 | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x + 2$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $2x + 1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $(x^2 - 4)(2x + 1)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

- Solutions de $(x^2 - 4)(2x + 1) < 0$ : $x < -2$ ou $-1/2 < x < 2 \Leftrightarrow$ **$x \in ]-\infty\ ;\ -2[ \cup ]-1/2\ ;\ 2[$.**

- $(x + 2)(1 - x) < x(x + 2) \Leftrightarrow (x + 2)(1 - x) - x(x + 2) < 0 \Leftrightarrow (x + 2)[(1 - x) - x] < 0 \Leftrightarrow (x + 2)(1 - 2x) < 0$ ;

  - Tableau de signe de $(x + 2)(1 - 2x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1/2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x + 2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $1 - 2x$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(x + 2)(1 - 2x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

  - Solutions de $(x + 2)(1 - x) < x(x + 2)$ : $x < -2$ ou $x > 1/2 \Leftrightarrow$ **$x \in ]-\infty\ ;\ -2[ \cup ]1/2\ ;\ +\infty[$.**

**Exercice 15 :**

1.

a. Tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x + 2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{x-1}{x+2}$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

b. Solutions de l'inéquation $\dfrac{x-1}{x+2} < 0$ : $-2 < x \leq 1 \Leftrightarrow$ **$x \in ]-2\ ;\ 1]$.**

3. Résolution des inéquations :

- $\dfrac{(x-1)(x-2)}{2x} \geq 0$ :

  - Tableau de signe de $\dfrac{(x-1)(x-2)}{2x}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x - 2$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $(x^2 - 4)(2x + 1)$ | | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

  - Solutions de $\dfrac{(x-1)(x-2)}{2x} \geq 0$ : $0 < x \leq 1$ ou $x \geq 2 \Leftrightarrow$ **$x \in ]0\ ;\ 1] \cup [2\ ;\ +\infty[$.**

- $\dfrac{x-3}{x-1} \geq \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{x-1} - \dfrac{2}{3} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{3(x-3) - 2(x-1)}{3(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(3x-9)-(2x-2)}{3(x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-7}{3(x-1)} \geq 0$

  - Tableau de signe de $\dfrac{x-7}{3(x-1)}$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 7$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x - 1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{x-7}{3(x-1)}$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

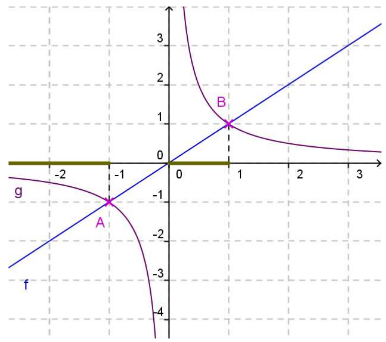
  - Solutions de $\dfrac{x-3}{x-1} \geq \dfrac{2}{3}$ : $x < 1$ ou $x \geq 7 \Leftrightarrow$ **$x \in ]-\infty\ ;\ 1[ \cup [7\ ;\ +\infty[$.**





**Exercice 16 :**

Résolution de l'inéquation $x \leq \dfrac{1}{x}$ :




- *graphiquement* : on a $x \leq \dfrac{1}{x}$ là où la courbe de la fonction $f : x \mapsto x$ est au-dessous de la courbe de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ ;

  On lit : $x \leq -1$ ou $0 < x \leq 1 \Leftrightarrow x \in ]-\infty\ ;\ -1] \cup ]0\ ;\ 1]$.

- *algébriquement* :

  - $x \leq \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x - \dfrac{1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 - 1}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x+1)}{x} \leq 0$ ;

  - Tableau de signe de $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x}$ :

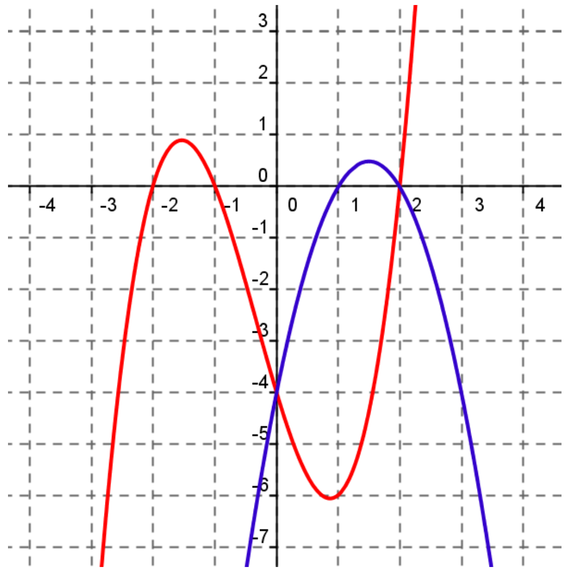
| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x + 1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x^2 - 4)(2x + 1)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

  - Solutions de $x \leq \dfrac{1}{x}$ : $x \leq -1$ ou $0 < x \leq 1 \Leftrightarrow x \in ]-\infty\ ;\ -1[ \cup ]0\ ;\ 1]$.

**Exercice 17 :**

Les courbes ci-après sont celles sur $[-2,5\ ;\ 2,5]$ des fonctions :

- ❑ $f : x \longmapsto (x^2 - 4)(x + 1)$,
- ❑ $g : x \longmapsto 2(x - 2)(1 - x)$.



1.

a. $g(1)$ : $g(1) = 2(1 - 2)(1 - 1) = 2(1 - 2)\times 0 = 0$.

b. Identification des deux courbes : Puisque $g(1) = 0$, le point de coordonnées $(1\ ;\ 0)$ appartient à la courbe de $g$ ;

Et comme une seule des 2 courbes passe par ce point, ce renseignement suffit à identifier chacune des 2 courbes.

2.

a. Tableau de signe de $g(x) = 2(x - 2)(1 - x)$ :

| $x$ | $-\infty$ | | 1 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 2$ | | – | | – | 0 | + | |
| $1 - x$ | | + | 0 | – | | – | |
| $g(x)$ | | – | 0 | + | 0 | – | |

b. Cohérence du tableau de signe de $g(x)$ avec le graphique :

- La courbe de $g$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle ]1 ; 2[ donc

$$g(x) > 0 \text{ si } x \in ]1 ; 2[ ;$$

- La courbe de $g$ est au-dessous de l'axe des abscisses sur les intervalles ]−∞ ; 1[ et ]2 + ∞[ donc

$$g(x) < 0 \text{ si } x \in ]-\infty ; 1[ \cup ]2 ; +\infty[ ;$$

- La courbe de $g$ coupe l'axe des abscisses lorsque $x = 1$ et $x = 2$ donc

$$g(x) = 0 \text{ si } x = 1 \text{ ou } x = 0 ;$$

Ces résultats sont bien conformes avec le tableau de signe de $g$.

3.

a. Résolution algébriquement des inéquations :

→ $f(x) > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x + 1) > 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x + 1) > 0$;

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 2$ | | – | | – | | – | 0 | + | |
| $x + 2$ | | – | 0 | + | | + | | + | |
| $x + 1$ | | – | | – | 0 | + | | + | |
| $f(x)$ | | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + | |

Donc $f(x) > 0 \Leftrightarrow -2 < x < -1$ ou $x > 0 \Leftrightarrow$ **$x \in ]-2 ; -1[ \cup ]2 ; +\infty[$.**

→ $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) - g(x) \leq 0 \Leftrightarrow ( (x^2 - 4)(x + 1) \leq 2(x - 2)(1 - x) \Leftrightarrow (x - 2)(x + 2)(x + 1) - 2(x - 2)(1 - x) \leq 0$

$$\Leftrightarrow (x - 2)[(x + 2)(x + 1) - 2(1 - x)] \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)[(x^2 + x + 2x + 2) - (2 - 2x)] \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)[x^2 + x + 2x + 2 - 2 + 2x] \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 5x) \leq 0 \Leftrightarrow x(x - 2)(x + 5) \leq 0;$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-5$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | | – | | – | 0 | + | | + | |
| $x - 2$ | | – | | – | | – | 0 | + | |
| $x + 5$ | | – | 0 | + | | + | | + | |
| $f(x) - g(x)$ | | – | 0 | + | 0 | – | 0 | + | |

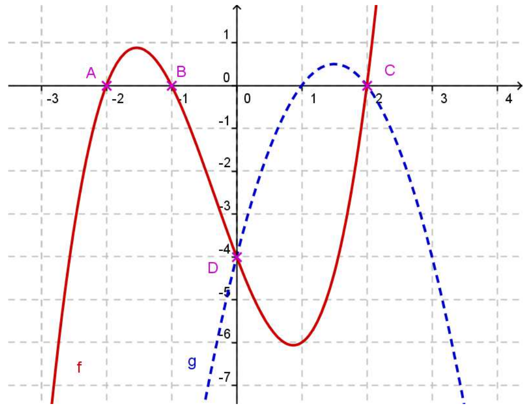
Donc $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow x \leq -5$ ou $0 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow$ **$x \in ]-\infty ; -5] \cup [0 ; 2]$**.

b. Cohérence des réponses avec le graphique :

- $f(x) > 0$ là où sa courbe est située au-dessus de l'axe des abscisses, à savoir sur ]−2 ; −1[ et sur ]2 ; +∞[.
- $f(x) \leq g(x)$ là où la courbe de $f$ est située au-dessous (au sens large) de la courbe de $g$, à savoir sur [0 ; 2] et sur ]−∞ ; ?[.








**Exercice 18 :**

*Le problème :*

Une société veut imprimer des livres.

La location de la machine revient à 750 euros par jour et les frais de fabrication s'élèvent à 3,75 euros par livres.

Combien faut-il imprimer de livres par jour pour que le prix de revient **d'un** livre soit inférieur ou égal à 6 euros ?

*La solution* :

→ Choix de l'inconnue : soit $x$ le nombre de livres imprimés ;

→ Contrainte(s) : $x$ entier naturel non nul ;

→ Mise en « équation » :

- Prix de revient total : $750 + 3{,}75x$;
- Prix de revient unitaire : $\dfrac{750 + 3{,}75x}{x}$;

D'où l'inéquation : $\dfrac{750 + 3{,}75x}{x} \leq 6$ ;

→ Résolution :

- $\dfrac{750 + 3{,}75x}{x} \leq 6 \Leftrightarrow \dfrac{750 + 3{,}75x}{x} - 6 \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{(750 + 3{,}75x) - 6x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{750 - 2{,}25x}{x} \leq 0$ ;
-

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $\dfrac{750}{2{,}25}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $750 - 2{,}25x$ | | + | | + | 0 | – | |
| $x$ | | – | 0 | + | | + | |
| $\dfrac{750 - 2{,}25x}{x}$ | | – | ‖ | + | 0 | – | |

- Solutions de $\dfrac{750 + 3{,}75x}{x} \leq 6$ : $x < 0$ ou $x \geq \dfrac{750}{2{,}25}$ .

→ Interprétation : Mais $x$ désignant un entier naturel non nul et comme $\dfrac{750}{2{,}25} \simeq 333{,}3$ les solutions sont donc les entiers naturels supérieurs ou égaux à 334.

Il faut donc imprimer au moins **334** livres par jour pour que le prix de revient d'un livre soit inférieur ou égal à 6 €.

☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆