Chapitre 3 : variations d'une fonction rationnelle

EXERCICE 3-6-6	★★	temps estimé:10-15mn

La fonction f est définie et dérivable sur $]2;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{6-3x}$.

1. Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe.

Solution:

On pose $u(x)=x^2+1$ et $v(x)=6-3x$

et on a $u'(x)=2x$ et $v'(x)=-3$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\\&=\frac{2x\times(6-3x)-(x^2+1)\times(-3)}{(6-3x)^2}\\&=\frac{12x-6x^2+3x^2+3}{(6-3x)^2}\quad \text{⚠ aux signes }-\\&=\frac{-3x^2+12x+3}{(6-3x)^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{3(-x^2+4x+1)}{(6-3x)^2}}$$

$(6-3x)^2>0$ sur $]2;+\infty[$ donc $f'(x)$ est du signe de son numérateur $3(-x^2+4x+1)$

donc $f'(x)$ est du signe de $-x^2+4x+1$

-Racines de $-x^2+4x+1$

$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times(-1)\times1=16-12=4$

$\Delta>0$ donc il y a deux racines

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\\&=\frac{-4+\sqrt{20}}{-2}\\&=\frac{-2(2-\sqrt{5})}{-2}\\&=2-\sqrt{5}\end{aligned}$$

et $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-4-\sqrt{20}}{-2}=2+\sqrt{5}$

⚠ penser à contrôler les racines avec la calculatrice

-Signe $-x^2+4x+1$

$-x^2+4x+1$ est du signe de $a=-1$ coefficients de x^2 à "l'extérieur" des racines

⚠ $x_1\notin]2;+\infty[$

x	2		$x_2 = 2+\sqrt{5}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

2. Dresser le tableau de variations de f.

On pourra donner les valeurs des extremums locaux arrondies aux centièmes

☛ **Solution**:

En utilisant le signe de $f'(x)$, on a :

x	2		$x_2 = 2+\sqrt{5}$		$+\infty$
signe de $f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\|\|$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	

avec $f(x_2) = f(2+\sqrt{5}) \approx 4,24$

Remarque

Il ne faut pas placer de valeurs arrondies dans le tableau de variations.

⚠ ne pas oublier la double barre (valeur interdite)

www.maths-premiere-ES.fr –Chapitre 3 : variations d'une fonction rationnelle