EQUATIONS-INEQUATIONS

Généralités

Définition

Une **équation** (respectivement une **inéquation**) est une égalité (resp. inégalité) dans laquelle figure une ou plusieurs **inconnues**.

Exemples :

- d'équations à une inconnue :
  - (a) $3x + 6 = 5x + 4$
  - (b) $t^2 + t - 2 = 0$
- d'inéquations à une inconnue :
  - (a) $3x + 6 > 0$
  - (b) $(t + 1)(t + 2) \leqslant t - 2$

Définition

Résoudre une équation (resp. inéquation) à une inconnue dans $\mathbb{R}$ c'est trouver **toutes** les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'égalité (resp. l'inégalité) est vérifiée : ces valeurs sont les **solutions** de l'équation (resp. l'inéquation).

Exercice 1 :

1. Montrer que le réel 1 est solution des deux équations :
   - (a) $3x + 6 = 5x + 4$;
   - (b) $t^2 + t - 2 = 0$.
2. Montrer que l'équation (b) admet une autre solution.

Définition

Deux équations ou inéquations sont dites **équivalentes** si elles ont les mêmes solutions.

Exemples :

- Les équations $2x + 5 = 0$ et $2x = -5$ sont équivalentes ; on écrit : $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = -5$;
- Les inéquations $-2x > 10$ et $x < -5$ sont équivalentes ; on écrit : $-2x > 10 \Leftrightarrow x < -5$.

Pour résoudre une équation ou inéquation, on la transforme, dans la mesure du possible, en une autre qui lui soit équivalente mais plus simple.

Il est donc nécessaire de savoir d'une part, transformer une équation ou inéquation en une autre équivalente et d'autre part, résoudre certaines équations ou inéquations simples.

Résolution d'équations

Techniques

Voici les techniques de base qui permettent de transformer une équation en une autre équivalente :

Description	Exemple
➢ On soustrait (ou ajoute) un même nombre aux deux membres.	$5x + 2 = 0 \Leftrightarrow 5x = -2$ ➔ retrait de 2
➢ On divise (ou multiplie) par un même nombre non nul les deux membres.	$5x = -2 \Leftrightarrow x = -\frac{2}{5}$ ➔ division par 5

Equations du type $ax + b = 0$ (équation du 1er degré)

Définition

Une équation du type $\boldsymbol{ax + b = 0}$ est appelée **équation du 1er degré**.

Résultat

L'équation $\boldsymbol{ax + b = 0}$ admet - quand $a \neq 0$ - une unique solution : $-\frac{b}{a}$.

Exemple : $5x+2=0 \Leftrightarrow 5x=-2 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{5}$ donc $S=\left\{-\frac{2}{5}\right\}$.

Exercice 2 :

Résoudre ces différentes équations (indiquer à chaque étape la transformation utilisée) :

- $x + 1 = 0$
- $2x = 0$
- $-x + 2 = 0$
- $3x - 2 = 0$
- $2x + 1 = 2 - \frac{1}{3}x$
- $\frac{x+2}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}x + 1$

Equations « produit » (du type $A(x)\times B(x) = 0$)

Résultat

$\boldsymbol{A(x)\times B(x) = 0} \Leftrightarrow (A(x) = 0)$ **ou** $(B(x) = 0)$.

Exemple : $(5x+2)(x-1)=0 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 5x+2=0 \\ x-1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x=-\frac{2}{5} \\ x=1 \end{array}\right.$ donc $S=\left\{-\frac{2}{5};1\right\}$.

Exercice 3 :

1. Résoudre : $(2x - 1)(2x + 2) = 0$ et $(2x + 1)^2 = 0$.
2. Pour résoudre les équations suivantes, ramener le second membre à 0, factoriser le premier ainsi obtenu puis utiliser le résultat ci-dessus :
   - → $(x - 1)(x + 2) = 3(x + 2)$
   - → $x^2 - 2x + 1 = 2x(x - 1)$
   - → $4(5x + 3)^2 = 9(x - 1)^2$

Equations « quotient » (du type $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$)

Résultat

$\boldsymbol{\frac{A(x)}{B(x)} = 0} \Leftrightarrow (A(x) = 0)$ **et** $(B(x) \neq 0)$.

Exemple : $\frac{5x+2}{x-1}=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 5x+2=0 \\ x-1\neq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{2}{5} \\ x\neq 1 \end{array}\right.$ donc $S=\left\{-\frac{2}{5}\right\}$.

Exercice 4 :

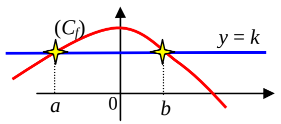
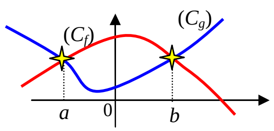
1. Résoudre : $\frac{x-1}{x+2} = 0$ et $\frac{(x+1)(x-2)}{2x} = 0$.
2. Pour résoudre l'équation suivante, ramener le second membre à 0, réduire au même dénominateur le premier ainsi obtenu puis utiliser le résultat ci-dessus : $\frac{x+2}{x} = \frac{x-1}{x+1}$.

Exercice 5 : *Pêle-mêle*

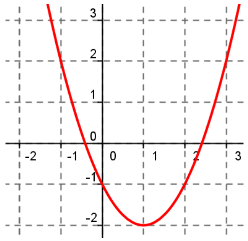
Résoudre ces différentes équations : $E_1 : -2x+4=5(x-2)$, $E_2 : (-4x+2)(x+3)=6$, $E_3 : 4x^2+2=1$ et $E_4 : \frac{x}{x-1} = \frac{1}{x^2-x}$.

Résolution graphique d'une équation

Résultat

$f(x) = k$	$f(x) = g(x)$
	
Les solutions sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe (C_f) et la droite d'équation $y = k$. Donc ici, $S = \{a ; b\}$.	Les solutions sont les abscisses des points d'intersection entre les courbes (C_f) et (C_g). Donc ici, $S = \{a ; b\}$.

Exercice 6 :



La courbe ci-contre est celle de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2x - 1$.

1. Résoudre graphiquement – donc approximativement – l'équation $f(x) = 2$.
2. Vérifier par calcul les solutions trouvées graphiquement c.-à-d. leur éventuelle exactitude.

Exercice 7 :

1. Construire sur votre calculatrice les représentations graphiques des fonctions :

$$f : x \longmapsto x^2 \text{ et } g : x \longmapsto 2x.$$

2. Résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$.

Exercice 8 :

Soient les fonctions $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto 2x + 3$.

1. *Résolution graphique*
   a. Construire sur votre calculatrice les courbes de ces deux fonctions.
   b. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ puis des valeurs approchées de ces dernières.
2. *Résolution algébrique*
   a. Montrer que $x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$.
   b. Trouver alors les valeurs exactes des solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

Mises en équations

Exercice 9 :

Trois enfants se partagent au mérite 180 € que leurs parents leur ont donnés pour avoir assuré l'entretien du jardin (tout au long de l'année !). L'un reçoit 25 € de plus qu'un autre qui lui-même reçoit 10 € de plus que le dernier.

On cherche ce que chacun d'eux a perçu.

Pour se faire, suivre la démarche suivante :

→ **Choix de l'inconnue** : on note x le nombre d'euros perçus par le dernier par exemple;
→ **Contrainte(s)** : à quel ensemble appartient x ?
→ **Mise en équation** : traduire le texte par une équation d'inconnue x;
→ **Résolution** : résoudre l'équation obtenue;
→ **Interprétation** : donner la part de chacun.

Exercice 10 :

Un particulier a des marchandises à faire transporter.

→ Un premier transporteur lui demande 460 euros au départ et 3,5 euros par km.

→ Un second lui demande 1 000 euros au départ et 2 euros par km.

Pour quelle distance à parcourir il importe peu de s'adresser à l'un plus qu'à l'autre ?

Résolution d'inéquations

Techniques

Voici les techniques de base qui permettent de transformer une inéquation en une autre équivalente:

Description	Exemples	
➢ On soustrait (ou ajoute) un même nombre aux deux membres.	$5x + 2 > 0 \Leftrightarrow 5x > -2$	➔ retrait de 2
➢ On divise (ou multiplie) les deux membres par un même nombre strictement **positif** ; on **conserve alors le sens de l'inégalité**.	$5x > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{2}{5}$	➔ division par 5
➢ On divise (ou multiplie) les deux membres par un même nombre strictement **négatif** ; on **inverse alors le sens de l'inégalité**.	$-5x > -2 \Leftrightarrow x < \frac{2}{5}$	➔ division par -5

Inéquations du 1^er^ degré

Exercice 11 :

Résoudre ces différentes inéquations :

→ $x + 1 > 0$ → $2x > 0$ → $-x + 2 > 0$ → $3x - 2 < 0$

→ $2x + 1 \geq 2 - 3x$ → $x^2 - 3x + 1 > (x-1)^2$

Signe d'une expression

Définition

Déterminer le **signe d'une expression** c'est chercher là où elle est positive, nulle ou négative.
On présente en général le résultat sous forme d'un tableau, appelé **tableau de signe**.

Résultat : signe d'une expression du 1[er] degré

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax + b$		signe de $-a$	0	signe de a	

Exercice 12 :

Dresser le tableau de signe de ces différentes expressions :

→ $2x - 3$ → $4 - 2x$ → $-2x - 1$ → $x^2 + 3$

Résultat

On sait – d'après la règle des signes - déterminer le signe :
- d'un **produit** à partir du signe de chacun de ses facteurs ;
- d'un **quotient** à partir du signe de son numérateur et de son dénominateur.

Exercice 13 :

1. On cherche à déterminer le signe des expressions $A(x) = (x + 2)(1 - x)$ et $B(x) = \dfrac{x-2}{3-x}$;

   A cet effet, compléter ces tableaux :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x + 2$				
$1 - x$				
$A(x)$				

x	$-\infty$	$+\infty$
$B(x)$		

2. Déterminer pareillement le signe des expressions suivantes :

→ $C(x) = (x + 1)(- x - 3)$ → $D(x) = x\,(1 + x)$ → $E(x) = (x - 2)(1 + x)^2$

→ $F(x) = x^2 - 4$ → $G(x) = \dfrac{(x-1)(1+x)}{x+2}$

Inéquations autres (produit ou quotient)

Résultat

Résoudre l'inéquation :
- ❑ $E(x) > 0$, c'est chercher pour quelles valeurs de x l'expression $E(x)$ est positive,
- ❑ $E(x) < 0$, c'est chercher pour quelles valeurs de x l'expression $E(x)$ est négative.

Donc on cherche d'abord le signe de l'expression $E(x)$ suivant x. Pour se faire, il est souvent nécessaire d'écrire $E(x)$ sous forme d'un produit ou d'un quotient puis de dresser alors un tableau de signe.

Exercice 14 :

1.
   a. Compléter ce tableau de signe :
   b. En déduire les solutions de l'inéquation :

   $(x + 3)(-x + 2) \geq 0.$

x	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$x + 3$				
$-x + 2$				
$(x + 3)(-x + 2)$				

2. Résoudre pareillement les inéquations :

→ $(x^2 - 4)(2x + 1) < 0$ → $(x + 2)(1 - x) < x(x + 2)$

Exercice 15 :

1.
   a. Compléter ce tableau de signe :
   b. En déduire les solutions de l'inéquation : $\dfrac{x-1}{x+2} < 0.$

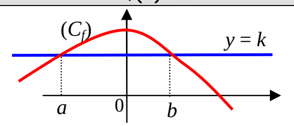
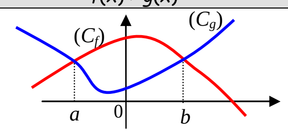
x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x - 1$				
$x + 2$				
$\dfrac{x-1}{x+2}$				

2. Résoudre pareillement les inéquations :

→ ≥ 0 → $\dfrac{x-3}{x-1} \geq \dfrac{2}{3}$

Résolution graphique d'une inéquation

Résultat

$f(x) > k$	$f(x) > g(x)$
	
Les solutions sont les abscisses des points de la courbe (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y = k$. Donc ici, $S =]a\,;\,b[$.	Les solutions sont les abscisses des points de la courbe (C_f) situés au-dessus de ceux de la courbe (C_g). Donc ici, $S =]a\,;\,b[$.

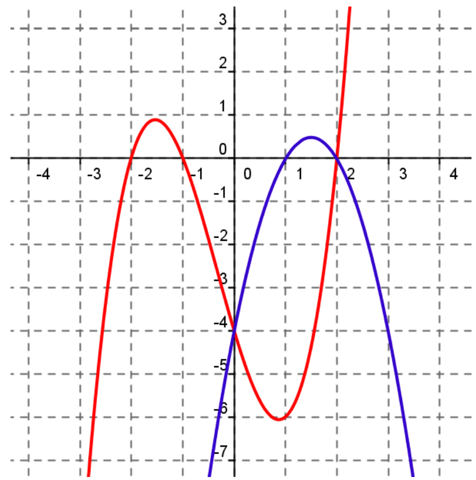
Exercice 16 :

Résoudre graphiquement – utiliser votre calculatrice - puis algébriquement l'inéquation : $x \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Exercice 17 :

Les courbes ci-après sont celles sur $[-2{,}5\,;\,2{,}5]$ des fonctions :

❑ $f : x \longmapsto (x^2 - 4)(x + 1)$, ❑ $g : x \longmapsto 2(x - 2)(1 - x)$.



1.
   a. Calculer $g(1)$.
   b. Reconnaître alors chacune des deux courbes.
2.
   a. Dresser le tableau de signe de $g(x)$.
   b. Vérifier la cohérence de votre réponse grâce au graphique.
3.
   a. Résoudre algébriquement les inéquations :
      → $f(x) > 0$;
      → $f(x) \leq g(x)$.
   b. Vérifier la cohérence de vos réponses grâce au graphique.

Mises en inéquations

Exercice 18 :

Une société veut imprimer des livres.
La location de la machine revient à 750 euros par jour et les frais de fabrication s'élèvent à 3,75 euros par livres.

Combien faut-il imprimer de livres par jour pour que le prix de revient **d'un** livre soit inférieur ou égal à 6 euros ?

☆☆☆☆☆☆☆