FONCTIONS : DERIVEES

CORRIGES EXERCICES

Exercice 1.

1.

→ $f(-2)$: ordonnée du point d'abscisse -2 de C_f à savoir A ; on lit : $f(-2) = 1$;

→ $f'(-2)$: coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse -2 à savoir A ; on lit : $f'(-2) = -\frac{3}{4}$;

→ Pareillement, on lit : $f(6) = 3$, $f'(6) = 2$ et $f'(2) = 0$.

2. La tangente à C_f au point A d'abscisse −2 a pour équation :

$$y = f'(-2)\left(x-(-2)\right)+f(-2) \text{ soit } y=-\frac{3}{4}(x+2)+1 \Leftrightarrow y=-\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}.$$

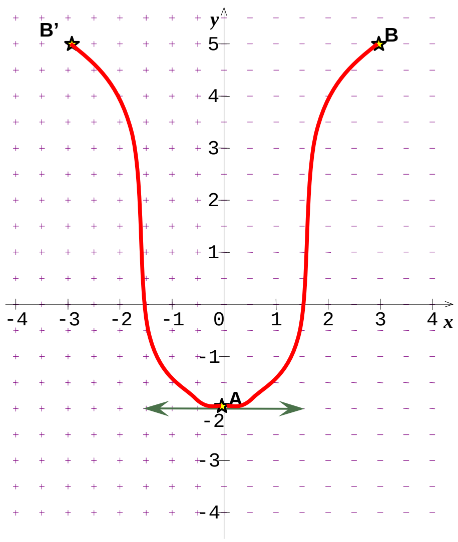
3. Pour $x \simeq -2$, $f(x) \simeq -\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}$ donc $f(-1{,}9) \simeq -\frac{3}{4}\times(-1{,}9)-\frac{1}{2}=0{,}925$.

4.

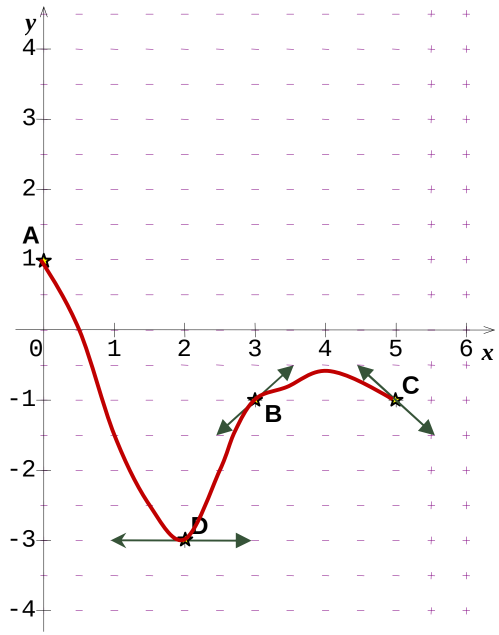
x	$-\infty$		-6		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	

On remarque il y a corrélation entre le signe de f' et les variations de f.

Exercice 2.



Exercice 3.



Exercice 4.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-1) = 2$ et $f'(-1) = \frac{1}{4}$.

L' équation réduite de la tangente à la courbe au point d'abscisse −1 est :

$$y = f'(-1)\left(x-(-1)\right)+f(-1) \text{ soit } y=\frac{1}{4}(x+1)+2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{9}{4}.$$

Exercice 5.

1.

a. $f(0) = 1$ et $f'(0) = -3$; $f(-1) = 3$ et $f'(-1) = 0$; $f(2) = 3$ et $f'(2) = 9$.

b. T_{-1} : $y = 3$;

c. T_0 : $y = -3x + 1$;

2. La droite T_{-2} tangente à la courbe C au point d'abscisse −2 et d'ordonnée −1 passe par le point A de coordonnées (1 ; 26).

a. $f'(-2)$ = coefficient directeur de T_{-2} : $\frac{-1-y_A}{-2-x_A}=\frac{-1-26}{-2-1}=9$;

b. T_{-2} : $y = f'(-2)\left(x-(-2)\right)+f(-2) \Leftrightarrow y=9(x+2)-1=9x+17$.

Exercice 6.

Soit $x_0 \in]0\,;+\infty[$;

→ Taux d'accroissement en x_0 :

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{\left(x-x_0\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x_0}\right)^2}{\left(x-x_0\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{\cancel{x-x_0}}{\cancel{\left(x-x_0\right)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\ ;$$

→ Limite du taux d'accroissement en x_0 :

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\ ;$$

Or $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}+\sqrt{x_0}=2\sqrt{x_0}$ donc :

- Si $x_0 = 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{x}+\sqrt{x_0}=0$ et $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=+\infty$, limite non finie donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.
- Si $x_0 > 0$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$, limite finie donc la fonction racine carrée est dérivable en $x_0 > 0$ et $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Au final, la fonction racine carrée est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ mais pas en 0.

Exercice 7.

1. $f(x)=7x^3$: $f'(x)=7\times 3x^2=21x^2$ ($f(x)=k\times x^n \Rightarrow f'(x)=k\times\left(nx^{n-1}\right)$) ;
2. $f(x)=\sqrt{x}-2x$: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-2$ ($f(x)=u(x)+v(x) \Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)$) ;
3. $f(x)=3x^4-2x^3+5x-4$: $f'(x)=3\times 4x^3-2\times 3x^2+5\times 1-0=12x^3-6x^2+5$
   ($f(x)=u(x)+v(x)+\ldots \Rightarrow f'(x)=u'(x)+v'(x)+\ldots$) ;
4. $f(x)=\sqrt{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$
   ($f(x)=u(x)\times v(x) \Rightarrow f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$) ;
5. $f(x)=\dfrac{5x-4}{x+1}$: $f'(x)=\dfrac{5(x+1)-(5x-4)\times 1}{(x+1)^2}=\dfrac{9}{(x+1)^2}$
   ($f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{v^2(x)}$) ;
6. $f(x)=\left(x^2+3\right)\left(3x^3-2x\right)$: $f'(x)=2x\times\left(3x^3-2x\right)+\left(x^2+3\right)\times\left(9x^2-2\right)$
   $=6x^4-4x^2+9x^4-2x^2+27x^2-6=15x^4+21x^2-6$
   ($f(x)=u(x)\times v(x) \Rightarrow f'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$).

Exercice 8.

1. $C(q)=1000-2q+0{,}01q^2 \Rightarrow C'(q)=0-2\times 1+0{,}01\times 2q=-2+0{,}02q$;
2. $f(x)=\dfrac{x^3}{6}+5x-\dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{6}\times 3x^2+5\times 1-\left(\dfrac{-1}{x^2}\right)=\dfrac{x^2}{2}+5+\dfrac{1}{x^2}$;
3. $Q(p)=1000+\dfrac{3000}{1+p} \Rightarrow Q'(p)=0+3000\times\dfrac{-1}{(1+p)^2}=\dfrac{-3000}{(1+p)^2}$;
4. $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{1\times\left(x^2+1\right)-(x+4)\times 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{x^2+1-2x^2-8x}{\left(x^2+1\right)^2}=\dfrac{-x^2-8x+1}{\left(x^2+1\right)^2}$;
5. $f(x)=\dfrac{3}{2x^2-1} \Rightarrow f'(x)=3\times\dfrac{-2\times 2x}{\left(2x^2-1\right)^2}=\dfrac{-12x}{\left(2x^2-1\right)^2}$.

Exercice 9.

L'équation réduite de la tangente au point A d'abscisse a de la représentation graphique d'une fonction f est donnée par la formule : $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

Ici, la fonction f est définie par $f(x)=x^2+5x-4$ donc $f'(x)=2x+5$ d'où :

- pour $a = -1$: $(T_{-1}): y=f'(-1)(x+1)+f(-1)$;

  Or $f(-1)=-8$ et $f'(-1)=3$ d'où $(T_{-1}): y=3(x+1)-8=3x-5$;
- pour $a = 2$: $(T_2): y=f'(2)(x-2)+f(2)$;

  Or $f(2)=10$ et $f'(2)=9$ d'où $(T_2): y=9(x-2)+10=9x-8$.

Exercice 10.

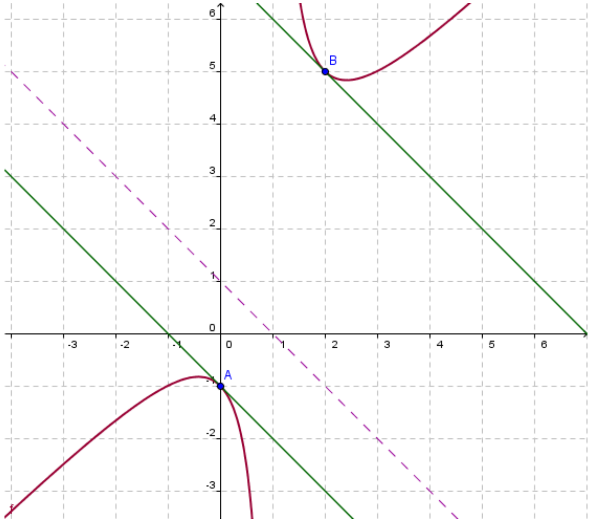
Deux droites sont parallèles si elles ont les mêmes coefficients directeurs.
Or celui de la droite d'équation $y = -x + 1$ est -1 est celui d'une tangente correspond au nombre dérivé. Le problème revient donc à résoudre l'équation $f'(x)=-1$.

Or, puisque $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$, $f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-\left(x^2+1\right)\times 1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$.

Donc $f'(x)=-1 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}=-1$

$$\Leftrightarrow x^2-2x-1=-x^2+2x-1 \Leftrightarrow 2x^2-4x=0 \Leftrightarrow 2x(x-2) \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=2\,.$$

La courbe admet donc des tangentes parallèles à la droite d'équation $y=-x+1$ aux points $A\left(0;\,f(0)=-1\right)$ et $B\left(2;\,f(2)=5\right)$.



Exercice 11.

1. On considère la fonction *f* définie par *f* (*x*) = *ax*² + *bx* + *c*.

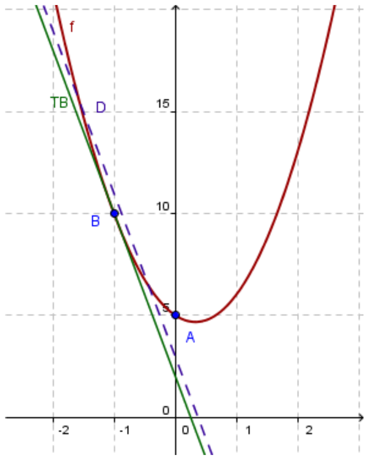
- A(0 ; 5) ϵ C_f ⇔ $f(0)=5 \Leftrightarrow c=5$;
- B(-1 ; 10) ϵ C_f ⇔ $f(-1)=10 \Leftrightarrow a(-1)^2+b(-1)+5=10 \Leftrightarrow a-b=5$;
- (T_B) // (D) : *y* = -8*x* +3 ⇔ $f'(-1)=-8 \Leftrightarrow 2a(-1)+b=-8 \Leftrightarrow -2a+b=-8$;

D'où le système linéaire 3×3 :

$$\begin{cases} c=5 \\ a-b=5 \\ -2a+b=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=5 \\ a=3 \\ b=-2 \end{cases}.$$

Par conséquent, $f(x)=3x^2-2x+5$.

2. Graphique :



Exercice 12.

1. $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$: **FAUX** car la tangente à C_f au point C d'abscisse 0 passe par D donc a pour coefficient directeur :

$$\frac{y_D-y_C}{x_D-x_C}=\frac{-1-3}{2-0}=-2 \text{ donc } f'(0)=-2$$

2. Pour tout *x* élément de l'intervalle [−2 ; +∞[, on a : $f'(x)\leq 0$: **VRAI** car sur l'intervalle [−2 ; +∞[*f* est décroissante donc sa dérivée *f'* est négative.
3. Soit une fonction *g* telle que *g'* = *f* (on dit que *g* est une PRIMITIVE de *f*) sur l'intervalle [−4 ; +∞[, alors la fonction *g* est décroissante sur l'intervalle [−2 ; +∞[: **FAUX** car *f* = *g'* est positive sur l'intervalle [−2 ; +∞[donc la fonction *g* est croissante sur l'intervalle [−2 ; +∞[.

Exercice 13.

x	-5		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	-5	↗	4	↘	$-4,5$

1. Sur l'intervalle]−5 ; +∞[, l'équation *f* (*x*) = −2 admet deux solutions : une dans [0 ; 2] car -2 ϵ [-5 ; 4] et une dans [2 ; +∞[car -2 ϵ [-4,5 ; 4].
2. Puisque que *f* '(2) = 0, la tangente à C au point d'abscisse 2 est horizontale donc son équation est $y=f(2)=4$.
3. Puisque l'équation de la tangente à C au point de coordonnées (1 ; 2) est *y* = 3*x* − 1, son coefficient directeur est 3 donc *f* ' (1) = 3.
4. La fonction *g* définie par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ a pour dérivée : $g'(x)=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}$; Or sur l'intervalle [−1 ; 0], *f* est décroissante donc *f'*(*x*) < 0 donc *g'*(*x*) > 0 d'où *g* est croissante sur l'intervalle [-1 ; 0].

Exercice 14.

1.

- La courbe Γ passe par le point *A*(0 ; 2) donc *f* (0) = 2 ;
- La droite (*AB*) qui a pour coefficient directeur -1 est la tangente en *A*(0 ; 2) à Γ donc *f'*(0) = -1.

2.

- La courbe qui représente la fonction dérivée *f'* de *f* doit avoir son signe corrélé aux variations de *f* donc c'est la courbe 1 ;

- La courbe qui représente la fonction dérivée h telle que $h' = f$ doit avoir ses variations corrélées au signe de f donc c'est la courbe 3.

Exercice 15.

Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1.
   - $f'(x) = 4x + 3$;
   - $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow 4x > -3 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4}$;

   Donc f' positive sur $]-\frac{3}{4} ; +\infty[$ et, a contrario, négative sur $]-\infty ; -\frac{3}{4}[$.
2. Donc f est décroissante sur $]-\infty ; -\frac{3}{4}[$ et croissante sur $]-\frac{3}{4} ; +\infty[$.
3. D'où :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$\frac{23}{8}$	↗	

4. f admet donc un extremum, à savoir un minimum égal à $\frac{23}{8}$, pris en $-\frac{3}{4}$.

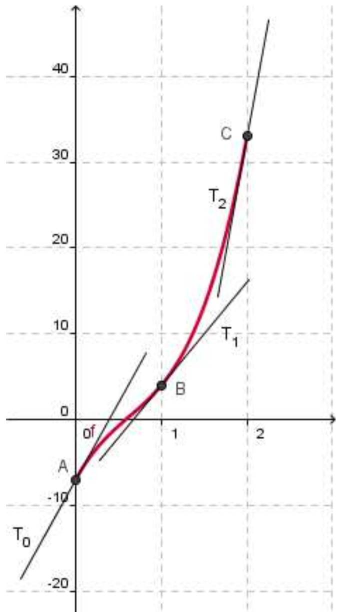
Exercice 16.

$f(x) = 8x^3 - 15x^2 + 18x - 7$ définie sur $[0 ; 2]$.

1. Calcul de f' : $f'(x) = 24x^2 - 30x + 18$;
   $\Delta < 0$ donc, comme $a = 24 > 0$, $f' > 0$.
2. f est donc croissante sur $[0 ; 2]$
3. Tableau des variations de f :

x	0		2
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-7	↗	33

4. Courbe et tangentes particulières : de f :



Exercice 17.

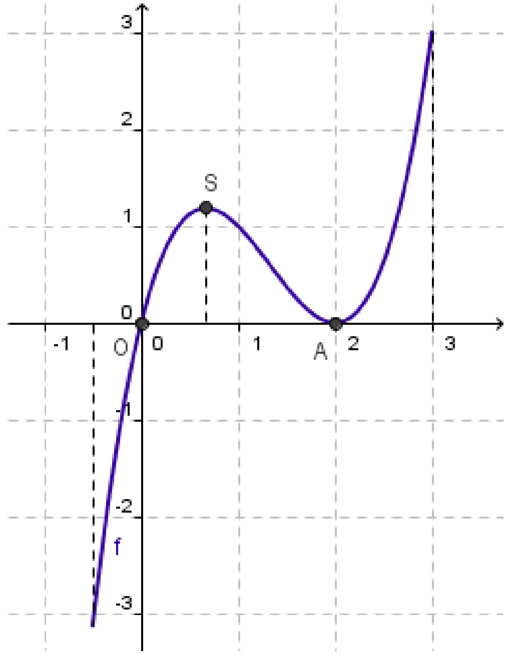
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$.

1.
   - Calcul de f' : $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 8x + 4$;
   - Signe de f' : $\Delta = 16 > 0$ donc 2 racines : $\frac{2}{3}$ et 2 ;

   Comme $a = 3 > 0$, $f' < 0$ sur $]-\infty ; \frac{2}{3}[\cup]2 ; +\infty[$ et $f' < 0$ sur $]\frac{2}{3} ; 2[$.
2. Tableau des variations de f :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$\frac{32}{27}$	↘	0	↗	

3. Courbe représentative de f sur l'intervalle $[-0,5 ; 3]$:



4. Coordonnées des points d'interception de la courbe avec l'axe des abscisses :
   Leurs abscisses sont les solutions de l'équation :

$$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3-4x^2+4x=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-4x+4\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x^2-4x+4=0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x^2-4x+4=0 \;\Leftrightarrow x=0 \text{ ou } \left(x-2\right)^2=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=2 \;;$$

Donc la courbe de *f* coupe l'axe des abscisses en 2 points : O(0 ; 0) et A(2 ; 0).

Exercice 18.

On considère *f* et *g* définies sur ℝ par : *f* (*x*) = *x* − 1 et *g* (*x*) = $\dfrac{x^2}{x-1}$.

1. Etude de *f* :
   - Calcul de *f'* : $f'(x)=1$;
   - Signe de *f'* : $f'(x)>0$ sur ℝ ;
   - Variation de *f* :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'(x)	+	
f(*x*)	↗	

2. Etude de *g* :
   - Calcul de *g'* : $g'(x)=\dfrac{2x\left(x-1\right)-x^2\times1}{\left(x-1\right)^2}=\dfrac{x^2-2x}{\left(x-1\right)^2}$;
   - Signe de *g'* : $g'(x)>0 \Leftrightarrow\Leftrightarrow x^2-2x>0 \Leftrightarrow x\left(x-2\right)>0 \Leftrightarrow x<0 \text{ ou } x>2$;
   - Variation de *g* :

x	-∞		0		1		2		+∞
g'(x)		+	0	−	‖	−	0	+	
g(*x*)		↗	0	↘	‖	↘	4	↗	

3.
   a. Courbes C*f* et C*g* :cf ci-après.

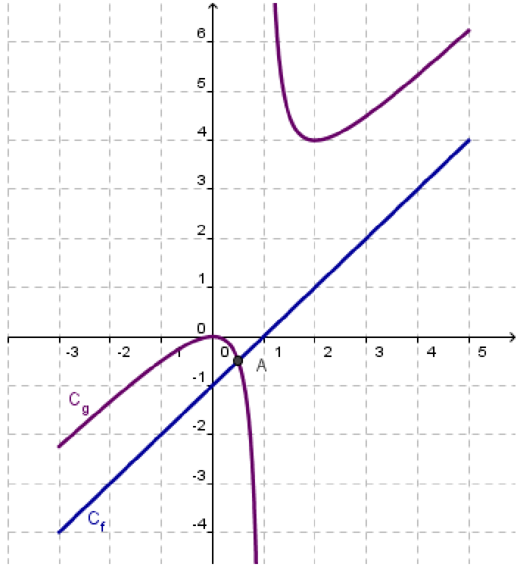
   b. C*f* et C*g* semblent (car on ne dispose pas des courbes sur ℝ) se couper en un point A(1/2 ; -1/2).

   c. Par le calcul, le problème revient à résoudre l'équation : *f* (*x*) = *g* (*x*) ; Or :

$$f(x)=g(x) \Leftrightarrow x-1=\frac{x^2}{x-1} \Leftrightarrow x-1-\frac{x^2}{x-1}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x-1\right)^2-x^2}{x-1}=0 \Leftrightarrow \frac{-2x+1}{x-1}=0 \Leftrightarrow -2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \;;$$

Ainsi, C*f* et C*g* se coupent en un point d'abscisse 1/2 et d'ordonnée *f*(1/2) = -1/2.



Exercice 19.

1.
   a. Pour que la modification soit réalisable, il faut que 0 ≤ *x* ≤ AB donc *x* ϵ I = [0 ; 20].

   b. Aire, en m², du nouveau terrain en fonction de *x* : de forme rectangulaire, son aire vaut donc :

   f(*x*) = AB'×AD' = (AB – *x*)(AD + *x*) = (20 – *x*)(10 + *x*);

   c. *f*(*x*) = (20 – *x*)(10 + *x*) = -x² + 10x + 200.

2.

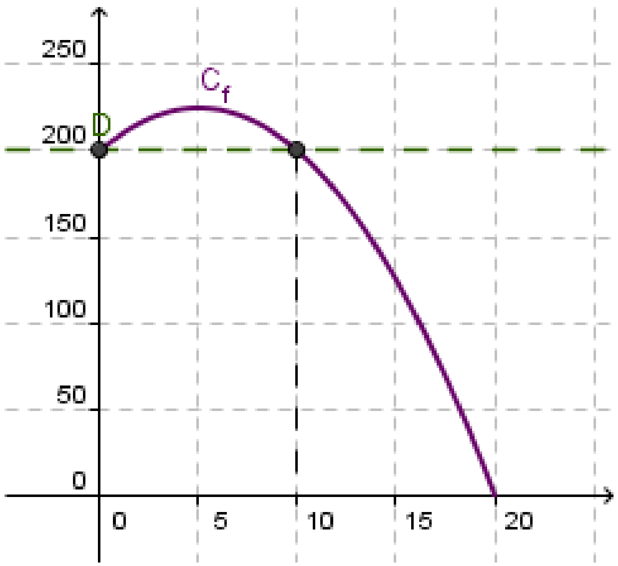
→ *f '*(*x*) = -2x + 10;

→ *f '*(*x*) > 0 ⇔ -2*x* + 10 > 0 ⇔ -2*x* > -10 ⇔ *x* < 5;

→ D'où le tableau de variation de *f* :

x	0		5		20
f '(x)		+	0	−	
f(*x*)		↗	225	↘	

3. (C) la représentation graphique de f :



4. Aire de l'ancien terrain : 20×10 = 200 m² ;

Le problème revient donc à résoudra l'inéquation : $f(x) > 200$;

→ *Graphiquement* : il faut considérer les abscisses des points de (C) situés au-dessus de la droite d'équation y = 200 ; on lit : $0 \leq x \leq 10$.

→ *Numériquement* : $f(x) > 200 \Leftrightarrow -x^2 + 10x + 200 > 200 \Leftrightarrow x(-x + 10) > 0$;

Cherchons le signe de l'expression : $x(-x + 10)$:

x	$-\infty$		0		10		20	$+\infty$
x		–	0	+	0	+		
$-x + 10$		+		+	0	–		
$x(-x + 10)$		–	0	**+**	0	–		

Ainsi, sur [0 ; 20], $x(-x + 10) > 0$ pour $x \in [0 ; 10]$ (résultat cohérent avec le précédent).

Exercice 20.

1. L'aire du poulailler est xy ; sachant qu'elle est de 392m², on a donc :

$$xy = 392 \Leftrightarrow y = \frac{392}{x}.$$

2. La longueur $l(x)$ du grillage est : $l(x) = 2x + y = 2x + \frac{392}{x} = \frac{2x^2+392}{x}$; CQFD !

3.

→ Dérivée l' de l : $l'(x) = \frac{4x \times x - (2x^2+392)\times 1}{x^2} = \frac{2x^2 - 392}{x^2}$.

→ $l'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 392 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 196 \Leftrightarrow x \geq 14$ (car $x > 0$).

→ Tableau des variations de l :

x	0		14		$+\infty$
$l'(x)$	‖	-	0	+	
$l(x)$	‖	↘	42	↗	

4. La clôture a une longueur minimale lorsque $x = 14$ et $y = \frac{392}{14} = 14$;

Sa longueur est alors de 42 m.