FONCTIONS : DERIVEES

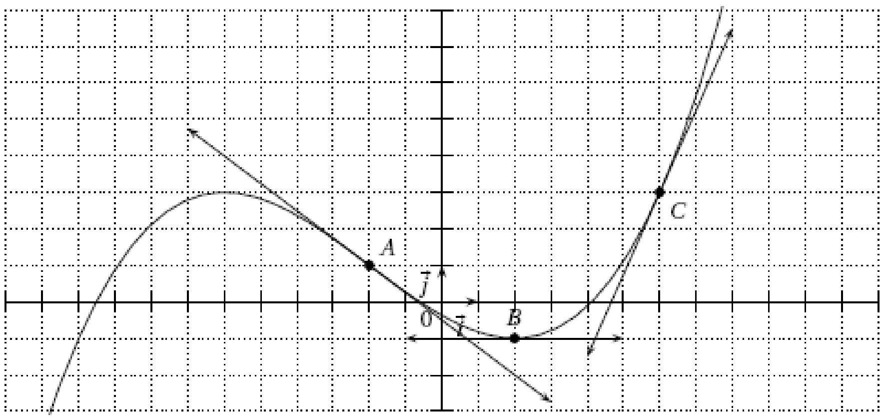
EXERCICES

Nombre dérivé/Tangente

Exercice 1.

On donne ci-dessous la courbe représentative C_f de la fonction f en y indiquant les droites tangentes aux points A, B et C.

1. Donner par lecture graphique $f(-2)$ et $f'(-2)$, $f(6)$ et $f\,(6)$ et $f'(2)$.
2. Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point A d'abscisse -2.
3. À l'aide d'une approximation affine de f, donner une estimation de $f(-1{,}9)$.
4. Dresser le tableau de signe de $f(x)$.



Exercice 2.

Tracer une courbe C représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 3]$ ayant les propriétés suivantes :

- f est décroissante sur $[-3 ; 0]$;
- f est paire ;
- $f(0) = -2$ et $f'(0) = 0$;
- $f(3) = 5$.

Exercice 3.

Tracer une courbe C représentant une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ ayant les propriétés suivantes :

- $f(0) = 1$;
- $f(3) = -1$ et $f(5) = -1$;
- f est décroissante sur l'intervalle $[0 ; 2]$;
- $f'(2) = 0$, $f'(3) = 1$ et $f\,(5) = -1$;
- f admet en 2 un minimum égal à -3 ;
- pour tout $x \in [2 ; 5]$, $f(x) < 0$.

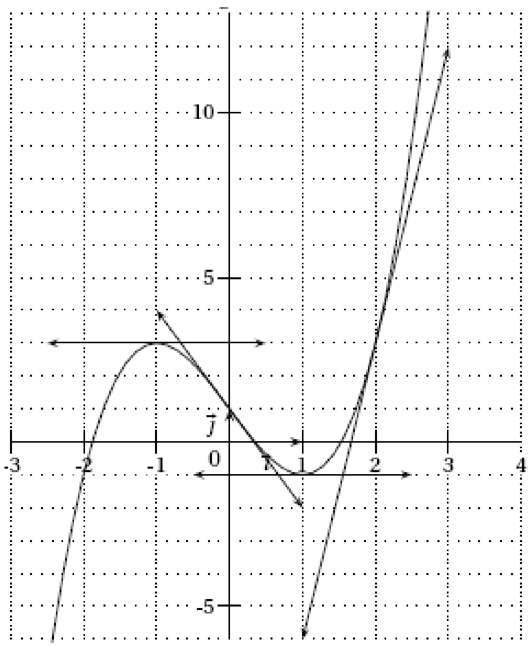
Exercice 4.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(-1) = 2$ et $f(-1) = \frac{1}{4}$.

Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse -1.

Exercice 5.

La courbe C ci-contre est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dans un repère orthogonal.



1. Déterminer graphiquement :
   a. f (0) et f '(0) ;
      f (−1) et f '(−1) ;
      f (2) et f '(2) ;
   b. L'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse −1 ;
   c. L'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
2. La droite T_{-2} tangente à la courbe C au point d'abscisse −2 et d'ordonnée −1 passe par le point A de coordonnées (1 ; 26).
   a. Déterminer $f'(-2)$.
   b. Déterminer l'équation réduite de T_{-2} .

Calcul de dérivées

Exercice 6.

Montrer que la fonction racine carrée est dérivable en tout nombre appartenant à $]0\,;+\infty[$ mais pas en 0.

Exercice 7.

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=7x^3$
2. $f(x)=\sqrt{x}-2x$
3. $f(x)=3x^4-2x^3+5x-4$
4. $f(x)=\sqrt{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$
5. $f(x)=\dfrac{5x-4}{x+1}$
6. $f(x)=\left(x^2+3\right)\left(3x^3-2x\right)$

Exercice 8.

Déterminer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $C(q)=1000-2q+0{,}01q^2$
2. $f(x)=\dfrac{x^3}{6}+5x-\dfrac{1}{x}$
3. $Q(p)=1000+\dfrac{3000}{1+p}$
4. $f(x)=\dfrac{x+4}{x^2+1}$
5. $f(x)=\dfrac{3}{2x^2-1}$

Exercice 9.

Ecrire une équation de la tangente au point A d'abscisse a de la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x)=x^2+5x-4$ pour $a=-1$ et $a=2$.

Exercice 10.

Soit f définie par $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$; Sa courbe représentative a-t-elle des tangentes parallèles à la droite d'équation $y=-x+1$? Si oui, en quels points ?

Exercice 11.

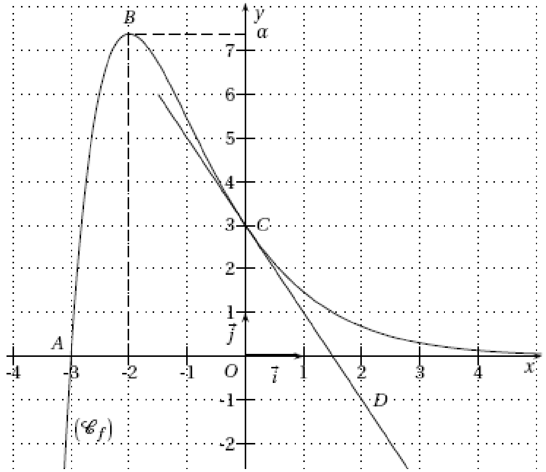
On considère la fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Déterminer a, b et c sachant que la courbe représentative de cette fonction passe par les points A(0 ; 5) et B(–1 ; 10) et qu'elle admet en B une tangente (T_B) parallèle à la droite (D) d'équation $y = -8x + 3$.
2. Construire alors (C_f), (D) et (T_B).

Signe de *f'* / Variations de *f*

Exercice 12.

La courbe C_f de la figure ci-après est une partie de la courbe représentative, relativement à un repère orthogonal, d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-4\,;+\infty[$.



On donne les renseignements suivants :

- les points $A(-3\,;0)$, $B(-2\,;\alpha)$ où $\alpha\approx 7{,}39$ et $C(0\,;3)$ sont des points de C_f ;
- l'axe des abscisses est asymptote à C_f en $+\infty$.
- la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;+\infty[$;
- la droite tangente à C_f en son point C passe par le point $D(2\,;-1)$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f .

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse à l'aide des renseignements ci-dessus ou du graphique.

1. $f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.
2. Pour tout x élément de l'intervalle $[-2\,;+\infty[$, on a : $f'(x)\leq 0$.
3. Soit une fonction g telle que $g' = f$ sur l'intervalle $[-4\,;+\infty[$, alors la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[-2\,;+\infty[$.

Exercice 13.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]-5\ ;\ +\infty[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous.

x	-5		-1		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	-5	↗	4	↘	$-4,5$

On désigne par C la courbe représentative de f .

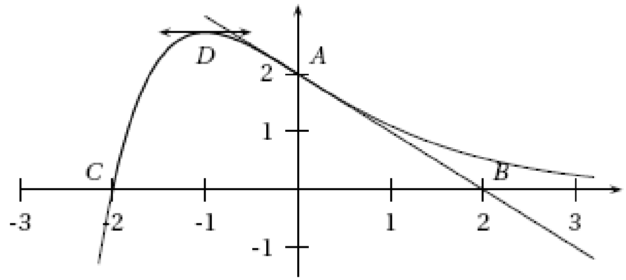
1. Sur l'intervalle $]-5\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = -2$:
   - admet une seule solution ;
   - admet deux solutions ;
   - admet quatre solutions.
2. On sait que $f'(2) = 0$; L'équation de la tangente à C au point d'abscisse 2 est :
   - $y = 4$;
   - $y = 4(x - 2)$;
   - $x = 4$.
3. On sait que l'équation de la tangente à C au point de coordonnées (1 ; 2) est $y = 3x - 1$. On a :
   - $f(2) = 1$;
   - $f'(1) = -1$;
   - $f'(1) = 3$.
4. Sur l'intervalle $[-1\ ;\ 0]$, la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$:
   - est croissante ;
   - est décroissante ;
   - n'est pas monotone.

Exercice 14.

On a représenté ci-dessous la courbe représentative Γ, dans un repère orthonormal, d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

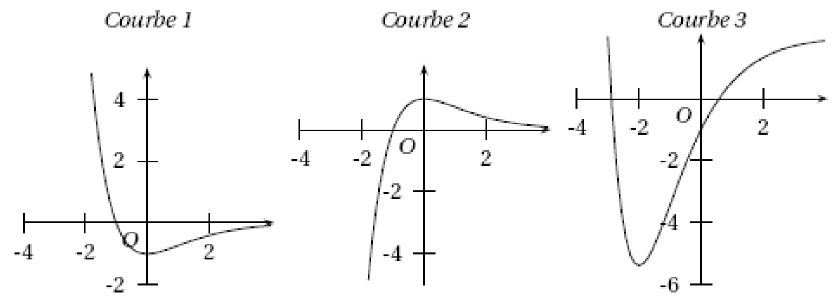
La courbe Γ passe par les points $A(0\ ;\ 2)$ et $C(-2\ ;\ 0)$ et la droite (AB) est la tangente en A à Γ.

La tangente à Γ en son point D d'abscisse -1 est parallèle à l'axe des abscisses.



1. Déterminer, à l'aide des renseignements fournis par l'énoncé, les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, une représente la fonction dérivée f' de f et une autre représente une fonction h telle que $h' = f$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction h.

   Vous expliquerez avec soin les raisons de votre choix



Exercice 15.

Soit $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. En déduire les variations de f .
3. Dresser le tableau des variations de f en y indiquant le signe de f'.
4. Montrer que f admet un extremum.

Exercice 16.

On donne $f(x)=8x^3-15x^2+18x-7$ définie sur [0 ; 2].

1. Étudier le signe de *f'*(*x*) selon les valeurs de *x*.
2. En déduire les variations de *f* .
3. Dresser le tableau des variations de *f* .
4. Tracer les tangentes à la courbe représentative de *f* aux points d'abscisse 0, 1 et 2 ainsi qu'aux extremums locaux, puis la courbe de *f* .

Exercice 17.

On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x^3-4x^2+4x$.

1. Calculer la dérivée *f '* de *f*. Étudier son signe.
2. Dresser le tableau des variations de *f* en précisant les éventuels extremums.
3. Tracer la courbe représentative de *f* sur l'intervalle [–0,5 ; 3].
4. Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'interception de la courbe avec l'axe des abscisses.

Exercice 18.

On considère les deux fonctions *f* et *g* définies sur $\mathbb{R}$ par :

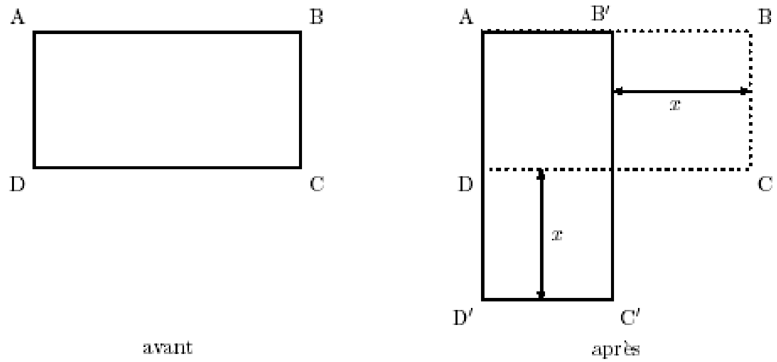
$$f(x) = x - 1 \text{ et } g(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

1. Calculer la dérivée *f '* de *f*, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de *f* .
2. Calculer la dérivée *g'* de *g*, étudier son signe et en déduire le tableau des variations de *g* .
3.
   a. Tracer soigneusement, dans un repère, les courbes C_f et C_g représentant les fonctions *f* et *g* (on se limitera à l'intervalle [–3 ; 5] et on prendra un pas de 0,25).
   b. Á l'aide du graphique, déterminer le nombre de points d'intersections entre C_f et C_g et leurs coordonnées.
   c. Retrouver ces résultats par le calcul.

Problèmes d'optimisation

Exercice 19.

Pour réduire la circulation des véhicules dans le centre d'une petite ville, la municipalité envisage de construire une déviation. Les propriétaires des terrains situés dans la zone où passera la déviation sont prévenus de ce projet.
On propose au propriétaire d'un terrain rectangulaire ABCD d'une longueur de 20 mètres et d'une largeur de 10 mètres, de modifier son terrain en retirant *x* mètres à la longueur et en ajoutant *x* mètres à la largeur comme l'indiquent les figures ci-après.
Il deviendrait alors propriétaire d'un nouveau terrain rectangulaire.
Le but de l'exercice est de connaître pour quelles valeurs de *x* le propriétaire obtient un nouveau terrain d'aire supérieure à l'aire de l'ancien terrain.

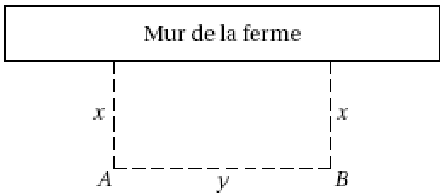


1.
   a. Préciser dans quel intervalle I peut varier *x*, afin que la modification soit réalisable.
   b. Exprimer, en m², l'aire du nouveau terrain en fonction de *x*.
   On notera *f*(*x*) le résultat.
   c. Vérifier que, pour tout nombre réel *x* de I, $f(x) = -x^2 + 10x + 200$.
2. Etudier le sens de variation de *f* sur l'intervalle [0 ; 20] et dresser le tableau de variation de *f*.

3. Le plan est rapporté à un repère orthogonal (unités : 0,5 cm pour 1 m en abscisse ; 0,5 cm pour 10 m² en ordonnée).
   On note (C) la représentation graphique de *f*. Tracer (C).
4. A l'aide de la représentation graphique, représenter sur l'axe des abscisses l'intervalle des valeurs de x telles que le nouveau terrain ait une aire plus grande que celle de l'ancien. Vérifier par le calcul.

Exercice 20.

Un fermier décide de réaliser un poulailler (de forme rectangulaire) le long du mur de sa maison. Ce poulailler devra avoir une aire de 392m².



Où doit-on placer les piquets *A* et *B* pour que la longueur de la clôture soit minimale ?
La figure ci-dessus représente le poulailler accolé à la ferme en vue de dessus.
On appelle x la distance séparant chaque piquet au mur et y la distance entre les deux piquets *A* et *B*.(on a donc $x > 0$ et $y > 0$).

1. Sachant que l'aire du poulailler est de 392m², exprimer y en fonction de x.
2. Démontrer que la longueur $l(x)$ du grillage est : $l(x) = \dfrac{2x^2+392}{x}$.
3. Calculer la dérivée l' de l ; En déduire le tableau des variations de l .
4. En déduire les dimensions x et y pour lesquelles la clôture a une longueur minimale . Préciser cette longueur.