EXERCICES : EQUATIONS

Exercice n°1.

→ (E_1) : $0x = 5$; pas de solution car $0x = 0 \neq 5$: $\boldsymbol{S = \varnothing}$;

→ (E_2) : $3x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{0}{3} = 0$: $\boldsymbol{S = \{0\}}$;

→ (E_3) : $0x = 0$; tout nombre convient car $0x = 0$: $\boldsymbol{S = \mathbb{R}}$;

→ (E_4) : $x^2 = -3$; pas de solution car $x^2 \geq 0$ et $-3 < 0$: $\boldsymbol{S = \varnothing}$.

Equations du 1er degré

Exercice n°2.

→ (E_1) : $2x + 5 = 0 \Leftrightarrow 2x = -5 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$;

→ (E_2) : $x^2 + 3x = x^2 + 6 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow x = \dfrac{6}{3} = \mathbf{2}$;

→ (E_3) : $\dfrac{3x}{4} - \dfrac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{3x - 10}{4} = 0 \Leftrightarrow 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}$;

→ (E_4) : $\dfrac{x + 1}{3} + \dfrac{x - 4}{5} = \dfrac{x}{15} \Leftrightarrow 5(x + 1) + 3(x - 4) = x$ *: on a × les 2 membres par 15*

$\Leftrightarrow 5x + 5 + 3x - 12 = x \Leftrightarrow 8x = 7 \Leftrightarrow x = \mathbf{7/8}$;

→ (E_5) : $3(2x - 1) - 5(4x + 2) = 9 \Leftrightarrow 6x - 3 - 20x - 10 = 9 \Leftrightarrow -14x = 22$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{22}{14} = -\dfrac{\mathbf{11}}{\mathbf{7}}$;

→ (E_6) : $(x - 3)(x + 2) = x^2 - 4x - 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - 4x - 2$

$\Leftrightarrow -x - 6 = -4x - 2 \Leftrightarrow 3x = 4 \Leftrightarrow x = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$;

→ (E_7) : $(x - 5)(2x + 3) - 2x(x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 10x - 15 - 2x^2 - 2x = 0$

$\Leftrightarrow 3x - 10x - 15 - 2x = 0 \quad \Leftrightarrow -9x = 15 \Leftrightarrow x = -\dfrac{15}{9} = -\dfrac{\mathbf{5}}{\mathbf{3}}$;

Equations produits

Exercice n°3.

→ (E_1) : $4(x - 5)(2x + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0$ ou $2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{5}$ ou $x = -\dfrac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$;

→ (E_2) : $\mathbf{(x - 5)}(2x + 3) + 4\mathbf{(x - 5)} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{(x - 5)}[(2x + 3) + 4] = 0$

$\Leftrightarrow (x - 5)(2x + 7) = 0 \Leftrightarrow x - 5 = 0$ ou $2x + 7 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{5}$ ou $x = -\dfrac{\mathbf{7}}{\mathbf{2}}$;

→ (E_3) : $x^2 + 3x = 5x \Leftrightarrow x^2 + 3x - 5x = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \mathbf{x}^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}(x - 2) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ ou $x = \mathbf{2}$;

→ (E_4) : $x^2 + 3x = 3x + 9 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 3x = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \mathbf{-3}$ ou $x = \mathbf{3}$;

→ (E_5) : $x^2 + 3x = -3x - 9 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{-3}$;

→ (E_6) : $\mathbf{(x - 1)}(2x + 3) + 4x\mathbf{(x - 1)} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{(x - 1)}[(2x + 3) + 4x] = 0$

$\Leftrightarrow (x - 1)(6x + 3) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{1}$ ou $x = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$;

→ (E_7) : $(x - 1)(2x + 3) + (x - 1)(3x - 4) = 1$ *cette équation n'est pas du type A×B = 0*

$\Leftrightarrow (2x^2 + 3x - 2x - 3) + (3x^2 - 4x - 3x + 4) - 1 = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(5x - 6) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $5x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ ou $x = \dfrac{\mathbf{6}}{\mathbf{5}}$;

→ (E_8) : $(4x + 1)(x + 2) - 2x(2x + 3) = 0$ *pas de facteur commun donc on développe au lieu de factoriser*

$\Leftrightarrow (4x^2 + 8x + x + 2) - (4x^2 + 6x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 8x + x + 2 - 4x^2 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$;

→ (E_9) : $x^2(2x + 1) = 4(2x + 1) \Leftrightarrow x^2\mathbf{(2x + 1)} - 4\mathbf{(2x + 1)} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{(2x + 1)}(x^2 - 4) = 0$

$\Leftrightarrow (2x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ ou $x = \mathbf{2}$ ou $x = \mathbf{-2}$;

→ (E_{10}) : $(x^2 - 9)(x + 1) + (x + 3)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)\mathbf{(x + 3)(x + 1)} + \mathbf{(x + 3)}(x - 1)\mathbf{(x + 1)} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{(x + 3)(x + 1)}[(x - 3) + (x - 1)] = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x + 1)(2x - 4) = 0$

$\Leftrightarrow x + 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$ ou $2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{-3}$ ou $x = \mathbf{-1}$ ou $x = \mathbf{2}$.

Equations quotients

Exercice n°4.

Rappel : le dénominateur d'une fraction **NE PEUT JAMAIS ETRE NUL**. les valeurs qui l'annulent, le cas échéant, seront appelées **VALEURS INTERDITES.**

→ (E_1) : $\dfrac{4x - 1}{5x} = 0$: La division par $5x$ impose $x \neq 0$; Alors, pour tout $x \neq 0$,

$\dfrac{4x - 1}{5x} = 0 \Leftrightarrow 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{4} (\neq 0)$ donc $\mathbf{S = \{\tfrac{1}{4}\}}$.

→ (E_2) : $\dfrac{x - 5}{x - 2} = \dfrac{2}{3}$: La division par $x - 2$ impose $x \neq 2$; Alors, pour tout $x \neq 2$,

$\dfrac{x - 5}{x - 2} = \dfrac{2}{3} \Leftrightarrow 3(x - 5) = 2(x - 2) \Leftrightarrow 3x - 15 = 2x - 4 \Leftrightarrow x = 11 (\neq 2)$ donc $\mathbf{S = \{11\}}$.

→ (E_3) : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 1} = 0$: L'équation est définie si et seulement si $x \neq 0$ et $x \neq -1$; Pour tout $x \neq 0$ et $\neq -1$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)+x}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x(x+1)} = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ($\neq 0$ et $\neq -1$) donc $\mathbf{S = \{-\frac{1}{2}\}}$.

→ $(E_4) : \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x(x+1)}$: L'équation est définie si et seulement si $x \neq 0$ et $x \neq -1$;

Pour tout $x \neq 0$ et $\neq -1$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} = \frac{2}{x(x+1)} \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x(x+1)} = \frac{2}{x(x+1)}$

$\Leftrightarrow (2x+1)\times x(x+1) = 2\times x(x+1) \Leftrightarrow (2x+1)\times x(x+1) - 2\times x(x+1) = 0$

$\Leftrightarrow x(x+1)[(2x+1)-2] = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(2x-1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$ ($\neq 0$ et $\neq -1$) donc $\mathbf{S = \{\frac{1}{2}\}}$.

Choisir entre différentes expressions, la mieux adaptée

Exercice n°5.

On pose, pour tout réel x, $f(x) = x^2 - 6x + 8$ (forme initiale).

1. $f(x) = (x-3)^2 - 1$: $(x-3)^2 - 1 = (x^2 - 6x + 9) - 1 = x^2 - 6x + 8 = f(x)$; CQFD !
2. Factorisation de $f(x)$:
   $f(x) = (x-3)^2 - 1 = (x-3)^2 - 1^2 = ((x-3) - 1)\times((x-3) + 1) = \mathbf{(x-4)(x-2)}$.
3. Résolution dans ℝ des équations :
   - $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-2) = 0 \Leftrightarrow x - 4 = 0$ ou $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{4}$ ou $x = \mathbf{2}$;
   - $f(x) = -1 \Leftrightarrow (x-3)^2 - 1 = -1 \Leftrightarrow (x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{3}$;
   - $f(x) = 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow x(x-6) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x - 6 = 0$
     $\Leftrightarrow x = \mathbf{0}$ ou $x = \mathbf{6}$;

Exercice n°6.

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = (x-1)^2 - 4$.

1. Développement et réduction de $f(x)$:
   $f(x) = (x-1)^2 - 4 = x^2 - 2x + 1 - 4 = \mathbf{x^2 - 2x - 3}$;
2. Factorisation de $f(x)$:
   $f(x) = (x-1)^2 - 4 = (x-1)^2 - 2^2 = ((x-1) - 2)((x-1) + 2) = \mathbf{(x-3)(x+1)}$;
3. Calcul, en utilisant l'expression la plus appropriée, de :
   → $f(0) = 0^2 - 2\times 0 - 3 = \mathbf{-3}$;
   → $f(1) = (1-1)^2 - 4 = 0^2 - 4 = \mathbf{-4}$;
   → $f(-1) = (-1-3)(-1+1) = (-1-3)\times 0 = \mathbf{0}$.
4. Antécédents :
   → de 0 : $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 3}$ ou $\mathbf{x = -1}$;
   → de -3 : $f(x) = -3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = -3 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x-2) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 0}$ ou $\mathbf{x = 2}$;
   → de -4 : $f(x) = -4 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 4 = -4 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = 1}$.

Exercice n°7.

On pose $f(x) = x^2 - 9 - 2(x+3)^2$.

1. Forme développée de $f(x)$:
   $f(x) = x^2 - 9 - 2(x+3)^2 = x^2 - 9 - 2(x^2 + 6x + 9)$
   $= x^2 - 9 - 2x^2 - 12x - 18 = \mathbf{-x^2 - 12x - 27}$;
2. Forme factorisée de $f(x)$:
   $f(x) = x^2 - 9 - 2(x+3)^2 = (x-3)(x+3) - 2(x+3)^2$
   $= (x+3)[(x-3) - 2(x+3)] = (x+3)[x - 3 - 2x - 6] = \mathbf{(x+3)(-x-9)}$;
3. Résolution de l'équation $f(x) = 0$:
   a. la forme la mieux adaptée pour résoudre cette équation est la forme factorisée;
   b. $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)(-x-9) \Leftrightarrow x + 3 = 0$ ou $-x - 9 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = -3}$ ou $\mathbf{x = -9}$.

Exercice n°8.

Soit $A = (3x-7)(2x-5) - (3x-7)^2$.

1. $A = (6x^2 - 15x - 14x + 35) - (9x^2 - 42x + 49)$
   $= 6x^2 - 15x - 14x + 35 - 9x^2 + 42x - 49 = \mathbf{-3x^2 + 13x - 14}$.
2. $A = (3x-7)(2x-5) - (3x-7)^2 = (3x-7)[(2x-5) - (3x-7)]$
   $= (3x-7)[2x - 5 - 3x + 7] = \mathbf{(3x-7)(-x+2)}$.
3.
   → $A(0) = -3\times 0^2 + 13\times 0 - 14 = \mathbf{-14}$;
   → $A(\frac{7}{3}) = (3\times\frac{7}{3} - 7)(-\frac{7}{3} + 2) = (7-7)(-\frac{7}{3} + 2) = 0\times(-\frac{7}{3} + 2) = \mathbf{0}$;
   → $A(2\sqrt{3}) = -3(2\sqrt{3})^2 + 13(2\sqrt{3}) - 14 = -3\times 12 + 26\sqrt{3} - 14 = \mathbf{-50 + 26\sqrt{3}}$.
4. $A = 0 \Leftrightarrow (3x-7)(-x+2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 7 = 0$ ou $-x + 2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x = \frac{7}{3}}$ ou $\mathbf{x = 2}$.

Mises en équation

Exercice n°9.

→ *Inconnue :* n ;
→ *Contrainte :* $n \in \mathbb{Z}$;
→ *Mise en équation :* $\mathbf{n + (n+1) + (n+2) = 36}$: (E)
→ *Résolution :* (E) $\Leftrightarrow n + (n+1) + (n+2) = 36 \Leftrightarrow 3n + 3 = 36 \Leftrightarrow n = 11$;
→ *Conclusion :* $11 \in \mathbb{Z}$ donc $\mathbf{n = 11}$.

Exercice n°10.

→ *Inconnue :* n, nombre de touristes initialement inscrit .
→ *Contrainte :* $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 4$.
→ *Mise en équation :* $\mathbf{11n = 13(n-4)}$: (E)

→ *Résolution :* (E) ⇔ $11n = 13(n-4)$ ⇔ $11n = 13n - 52$ ⇔ $2n = 52$ ⇔ $n = 26$;

→ *Conclusion :* 26 satisfait les contraintes donc $\boldsymbol{n = 26}$.

Exercice n°11.

→ *Inconnue :* l, la longueur en cm de ce roseau .

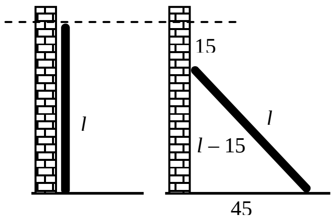
→ *Contrainte :* $l \geq 45$.

→ *Mise en équation :* $l^2 = (l-15)^2 + 45^2$: (E)

→ *Résolution :* (E) ⇔ $l^2 = l^2 - 30l + 225 + 2025$

$$\Leftrightarrow 0 = -30l + 2250 \Leftrightarrow l = \frac{2250}{30} = 75.$$

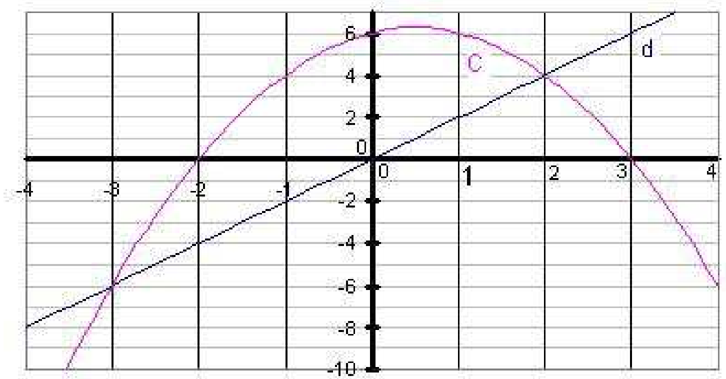
→ *Conclusion :* $75 \geq 45$ donc $\boldsymbol{l = 75}$.



Résolutions graphiques

Exercice n°12.

la parabole C d'équation $y = ax^2 + bx + c$ et la droite d d'équation $y = mx + p$.



On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{mx+p}{ax^2+bx+c}$.

1. f est définie si et seulement si $ax^2 + bx + c \neq 0$. Or $ax^2 + bx + c = 0$ pour les abscisses des points d'intersection de la parabole C et de l'axe des abscisses. On lit sur le graphique que $ax^2 + bx + c = 0$ pour $x = -2$ ou $x = 3$. Ainsi ,

$$D_f =]-\infty ; -2[\cup]-2; 3[\cup]3 ; +\infty[.$$

2. Une fraction est nulle si et seulement si son numérateur est nul; Ainsi $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{mx+p}{ax^2+bx+c} = 0 \Leftrightarrow mx+p = 0$. Or $mx + p = 0$ pour les abscisses des points d'intersection de la droite d et de l'axe des abscisses. On lit sur le graphique que $mx + p = 0$ pour $x = 0$. Ainsi, $S = \{0\}$.

3. Une fraction vaut 1 si et seulement si son numérateur et son dénominateur sont égaux; Ainsi $f(x) = 1 \Leftrightarrow \dfrac{mx+p}{ax^2+bx+c} = 1 \Leftrightarrow mx+p = ax^2+bx+c$. Or $mx + p = ax^2 + bx + c$ pour les abscisses des points d'intersection de la droite d et de la parabole C. On lit sur le graphique que $mx + p = ax^2 + bx + c$ pour $x = -3$ ou $x = 2$. Ainsi, $S = \{-3 ; 2\}$.

4. A partir du tableau de signes de $mx + p$ et $ax^2 + bx + c$, on dresse celui de f (attention aux valeurs interdites !).

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
$mx+p$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
ax^2+bx+c		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x) = \dfrac{mx+p}{ax^2+bx+c}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Exercice n°13.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2 + \dfrac{5}{2x+3}$.

1. Image :

→ de 0 : $f(0) = 2 + \dfrac{5}{2\times 0+3} = 2 + \dfrac{5}{3} = \dfrac{11}{3}$;

→ de 1 : $f(1) = 2 + \dfrac{5}{2\times 1+3} = 2 + 1 = 3$;

2. Antécédent(s) :

→ de 0 : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \dfrac{5}{2x+3} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2x+3} = -2 \Leftrightarrow -2(2x+3) = 5$

$$\Leftrightarrow -4x - 6 = 5 \Leftrightarrow -4x = 11 \Leftrightarrow x = -\frac{11}{4};$$

→ de 2 : $f(x) = 2 \Leftrightarrow 2 + \dfrac{5}{2x+3} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{5}{2x+3} = 0$: impossible.

3. Illustration graphique :